

Wycena opcji: rozszerzenie modelu Blacka-Scholesa

Karol Życzkowski

Instytut Fizyki M. Smoluchowskiego, Uniwersytet Jagielloński,
ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków

Kraków, 10 marca 1997

1 Wstęp - teoria Blacka-Scholesa

Teoria Blacka-Scholesa [1], pozwalająca wyznaczyć ceny opcji europejskich, oparta jest na następujących założeniach:

a) Stopa procentowa r , przy której nie występuje ryzyko (np. oprocentowanie bonów skarbowych lub obligacji) jest stała.

b) Rynek jest efektywny – nie istnieją możliwości arbitrażu, (a więc wartość każdego portfela Π o zerowym ryzyku rośnie wg stopy r , tj. $\Pi(t) = \Pi(0)e^{rt}$.)

c) Nie ma kosztów transakcji (rynek jest idealny), a akcje można kupić i natychmiast sprzedać nic nie tracąc.

d) Transakcji kupna/sprzedaży akcji można dokonywać w sposób ciągły (na każdą, dowolnie małą zmianę ceny akcji można odpowiedzieć zmieniając dowolnie często skład portfela).

e) Akcje są dowolnie podzielne, (liczba akcji w portfelu nie musi być całkowita).

f) Krótkiej sprzedaży akcji można dokonywać bez ograniczeń, (liczba akcji w portfelu może też być ujemna).

g) Akcje nie przynoszą dywidend (podczas okresu ważności opcji), a koszty przechowywania akcji (a także innych instrumentów pierwotnych, np. towarów) są równe zeru.

h) Zmiany cen akcji w czasie opisywane są przez log-normalny proces Wienera (względne zmiany cen akcji traktować można jako niezależne zmienne losowe o rozkładzie Gaussa).

i) Współczynnik zmienności akcji σ , jest znany i stały w czasie (własności procesu stochastycznego nie zmieniają się).

W powyższym wykazie jako instrument pierwotny przyjęto akcję, lecz teoria Blacka-Scholesa odnosi się też do innych opcji (walutowych, towarowych, procentowych, indeksowych, itd.) Niech r oznacza stopę procentową bez ryzyka, T okres ważności opcji, K cenę realizacji opcji, a σ współczynnik zmienności cen instrumentu pierwotnego. Jeżeli cena instrumentu pierwotnego w chwili t wynosi S (i zależy od czasu: $S = S(t)$), to ceny Blacka-Scholesa opcji kupna C (*call*) i sprzedaży P (*put*) są odpowiednio równe

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (1)$$

$$P(S, t) = -SN(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}N(-d_2), \quad (2)$$

gdzie argumenty d_1 i d_2 są dane wzorami

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad (3)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}, \quad (4)$$

a $N(x)$ oznacza funkcję błędu (dystrybuantę rozkładu normalnego) $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-s^2/2} ds$. Dystrybuantę $N(x)$ można przedstawić przez zaimplementowaną w wielu programach komputerowych funkcję $\text{erfc}(x)$ jako

$N(x) = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. W uzupełnieniu na końcu rozdziału przedstawiono równanie różniczkowe cząstkowe wprowadzone przez Blacka i Scholesa [1], którego rozwiązaniem jest wzór na cenę opcji kupna (1).

Korzystając z tożsamości $N(x) + N(-x) = 1$ nietrudno wykazać, że wzory (1) i (2) spełniają następujący związek

$$C + Ke^{-r(T-t)} = S + P. \quad (5)$$

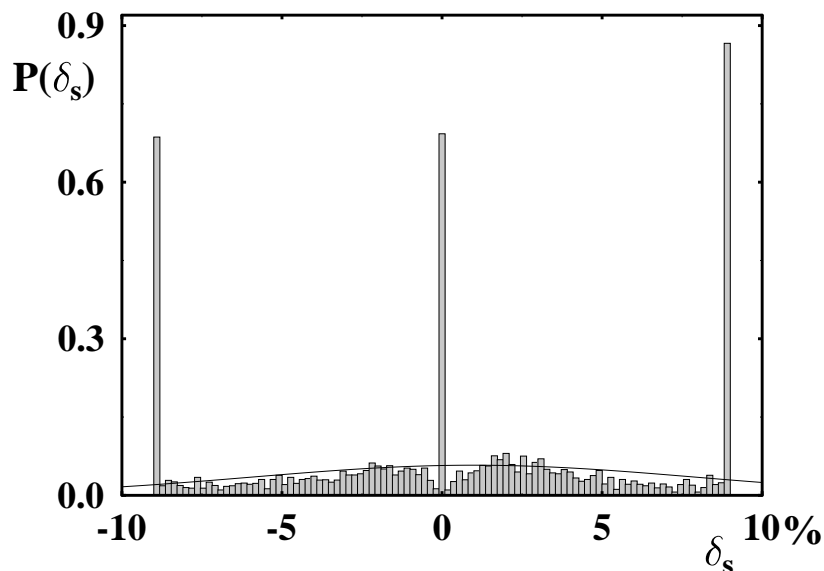
Relacja ta, zwana parytetem kupna/sprzedaży (*put-call parity*), posiada prostą interpretację: aby w początkowej chwili t zapewnić sobie zakup akcji w momencie T za cenę K , można nabyć opcję kupna płacąc C oraz ulokować w obligacjach sumę równą zdyskontowanej cenie realizacji $Ke^{-r(T-t)}$. Z drugiej strony, aby w chwili T móc sprzedać akcję po tej samej cenie K , należy kupić akcję po bieżącej cenie S oraz opcję sprzedaży płacąc za nią P .

2 Założenia teorii B–S, a rynek rzeczywisty

Nie wszystkie założenia teorii Blacka–Scholesa a)–h), umożliwiające wyprowadzenie wzorów (1) oraz (2), są jednakowo dobrze spełnione na rzeczywistym rynku papierów wartościowych. Empiryczne badania ruchów cen na rynkach amerykańskich wskazują dużą efektywność rynku. Także rozwijający się rynek w Polsce ewoluje w kierunku wytyczonym przez rozwinięte rynki zachodnie, na których założenie b) jest dobrze spełnione. Z założeń a) oraz i) o stałości stopy procentowej i współczynnika zmienności można zrezygnować, jeśli zmienność tych parametrów w czasie jest znana. Założenie e) o podzielności akcji jest uzasadnione dla dużych inwestorów, obracających dużymi liczbami akcji. Założenie o dopuszczalności krótkiej sprzedaży f), nie spełnione jeszcze w warunkach polskich, jest uzasadnione w przypadku rynków rozwiniętych. Model Blacka - Scholesa można uogólnić dopuszczając wypłacanie dywidend, sprzeczne z założeniem g).

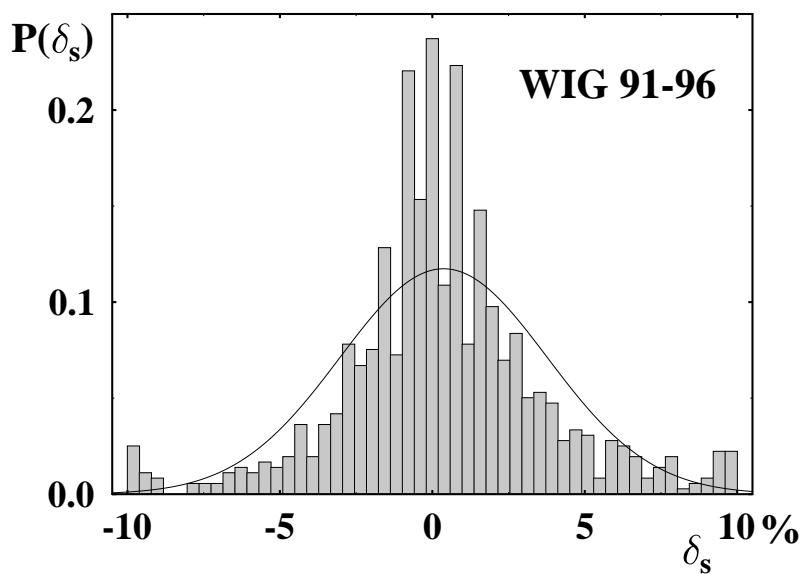
Najistotniejszym ograniczeniem modelu B–S jest założenie c) dotyczące braku kosztów transakcji. W praktyce nie można oczywiście zaniedbać kosztów transakcji, co powoduje też, że nie jest możliwa dowolnie częsta zmiana składu portfela d). Koszty transakcji można porównać do występujących w przyrodzie sił tarcia, które powodują rozpraszanie energii i ograniczają ruch ciał fizycznych. Co ważniejsze, nie istnieje uogólnienie modelu B–S, które pozwoliłoby otrzymać jawne wzory na ceny opcji przy niezerowych kosztach transakcji. W tym miejscu przedstawimy jedynie proste metody szacowania wartości przybliżonych.

Kolejna grupa założeń dotyczy charakteru zmian cen na rynku (punkt h). Empiryczna analiza pokazuje, że na rynkach rozwiniętych statystyka względnych zmian cen akcji w pierwszym przybliżeniu opisywana jest rozkładem Gaussa, co sprawia, że rozkład bezwzględnych zmian cen można przybliżać rozkładem log-norm. Na rynkach rozwijających się można natomiast obserwować większe odstępstwa od tych założeń. Jako przykład służyć mogą dane z historii giełdy w Warszawie. Szczególnie w pierwszym okresie rozwoju giełdy względne zmiany cen poszczególnych akcji nie podlegały rozkładowi normalnemu. Rysunek 1 ukazuje łączny rozkład względnych zmian cen 19 papierów najdłużej notowanych na polskiej giełdzie za lata 1991–95. Skrajne piki rozkładu (przy $\delta = \pm 10\%$) wynikają z dziennych ograniczeń wielkości zmian cen, a wierzchołek środkowy wydaje się być związany z dyskretnym charakterem notowań i jednolitym kursem dnia (inwestor składający zlecenie na dzień następny sugeruje się ceną akcji z danego dnia).



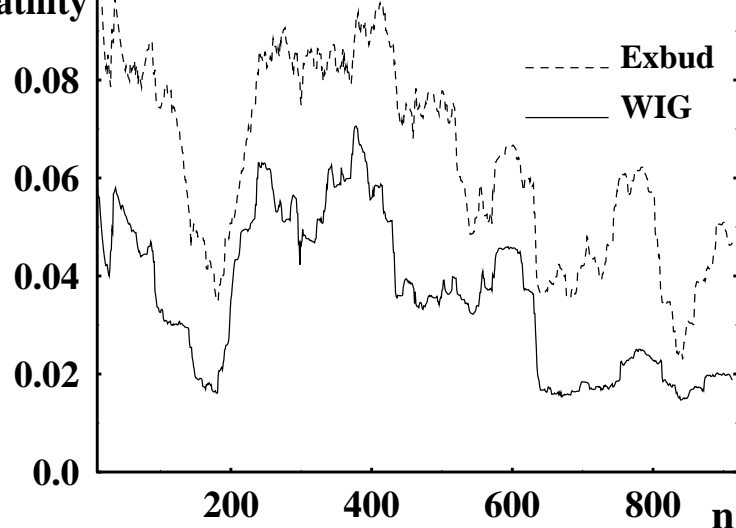
Rys.1 Sumaryczny histogram względnych dziennych zmian cen 19 różnych spółek z giełdy polskiej w latach 1991-95.

Warszawski indeks giełdowy (WIG), obliczany jako ważona średnia z kursu różnych akcji, fluktuuje mniej, niż ceny poszczególnych akcji. Rozkład względnych zmian indeksu jest bliższy rozkładowi Gaussa, niż rozkład zmian cen poszczególnych akcji, jak pokazano na rysunku 2. Współczynnik zmienności indeksu WIG jest mniejszy, niż współczynnik zmienności cen pojedynczej akcji.



Rys.2 Histogram względnych dziennych zmian indeksu WIG w latach 1991-95.

Wbrew założeniom teorii B-S, współczynniki zmienności na giełdzie nie są stałe, lecz zmieniają się w czasie. Rysunek 3 przedstawia współczynnik zmienności (*volatility*) dla indeksu WIG i przykładowej akcji (Exbud), uśredniane po ruchomym przedziale 60 notowań, w funkcji kolejnego numeru notowania. Największa zmienność charakteryzowała pamiętny okres pierwszej połowy roku 1994. Obecnie, wczesną wiosną roku 1997, współczynnik zmienności indeksu WIG stabilizuje się na poziomie poniżej 2% dziennie.



Rys.3 Zmiany współczynnika zmienności σ dla indeksu WIG (krzywa ciągła) oraz Exbudu (krzywa przerywana) w zależności od numeru notowania n .

Model Blacka–Scholesa stanowi więc daleką idealizację realnego rynku papierów wartościowych. W dalszych częściach tego artykułu zostaną przedstawione pewne uogólnienia tego modelu, które pozwalają na lepszy opis rzeczywistego problemu wyceny opcji. Kolejność przedstawiania podyktowana jest ich matematyczną złożonością: niektóre z tych zagadnień są wyczerpująco omówione w klasycznych podręcznikach przedmiotu [2, 3, 4]. Z drugiej strony, np. problem znalezienia ceny opcji i optymalnej strategii osłony przy niezerowych kosztach transakcji, po dziś dzień będący przedmiotem wielu oryginalnych prac [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11], można uważać za otwarte.

3 Zmienna stopa procentowa i współczynnik zmienności

Na rynkach rzeczywistych wolna of ryzyka stopa procentowa r zmienia się. Także współczynnik zmienności σ nie jest stały, jak pokazano powyżej na przypadku giełdy w Warszawie. Zakładając, że zależności czasowe $r = r(t)$ oraz $\sigma = \sigma(t)$ są znane, możemy policzyć wartości średnie podczas okresu ważności opcji: średnią stopę procentową

$$\hat{r} = \frac{1}{T-t} \int_t^T r(t) dt, \quad (6)$$

oraz średni kwadrat współczynnika zmienności

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T (\sigma(t)^2) dt. \quad (7)$$

Zamieszczone w dodatku równanie B–S (22) pozostaje prawdziwe, gdy parametry r i σ są zmienne w czasie [12]. Można pokazać, że rozwiązaniem tego równania na cenę opcji kupna $C = C(S, t)$ będzie wzór Blacka–Scholesa (1), w którym zastąpiono stałe wartości parametrów r i σ^2 przez ich wartości średnie:

$$r \rightarrow \hat{r}, \quad \sigma^2 \rightarrow \hat{\sigma}^2. \quad (8)$$

Oczywistym ograniczeniem na stosowanie wzorów (1) i (2) z powyższym podstawieniem jest konieczność znajomości zmian stopy procentowej $r(t)$ oraz współczynnika zmienności $\sigma(t)$, aż do chwili wygaśnięcia opcji. W praktyce, przewidując w niedalekiej przyszłości zmiany parametrów r lub σ^2 , łatwo w ten sposób otrzymać poprawki do podstawowego wzoru Blacka–Scholesa.

4 Dywidendy

W tym rozdziale omówimy wpływ dywidend na wartość opcji kupna akcji danej wzorem (1). Wzór (2) określający wartość opcji sprzedaży można zmodyfikować w analogiczny sposób. Założenie o dywidendach dyskretnych w czasie stosuje się do przypadku akcji pojedynczej spółki, dla której dywidendy wypłacane są

kilka razy do roku. Model ciągłej wypłaty dywidend przybliża zagadnienie opcji indeksowych, walutowych i towarowych.

4.1 Dywidendy wypłacane w sposób dyskretny

Załóżmy, że posiadacz jednej akcji otrzyma w chwili t_d dywidendę w znanej wysokości \hat{D} . Wypłata dywidendy rzutuje na cenę akcji na rynku: w momencie wypłaty cena spada o wielkość dywidendy, co zapiszemy symbolicznie $S(t_d^+) = S(t_d^-) - \hat{D}$. W przeciwnym wypadku istniała by możliwość arbitrażu: kupując akcję, odbierając dywidendę i sprzedając akcję można by uzyskać dochód bez ryzyka.

W chwili wypłaty dywidendy wartość akcji zmienia się w sposób skokowy. Ponieważ posiadacz opcji nie otrzymuje dywidendy, wartość opcji w tym momencie nie zmienia się $C_D(t_d^+) = C_D(t_d^-)$. Te warunki wystarczają do wyznaczenia ceny opcji C_D , przy wypłacaniu dywidendy D . Rozpocznijmy analizę od momentu wygaśnięcia opcji $t = T$, cofając się w czasie do chwili wypłacenia dywidendy $t_d < T$. W tym przedziale standardowe równanie B-S daje klasyczną cenę opcji kupna

$$C_D(S, t) = C(S, t; K), \quad (9)$$

dane wzorem (1) oraz współczynnikami (3) i (4) liczonymi przy cenie realizacji K .

Na skutek skokowej zmiany ceny akcji w momencie wypłaty dywidendy, w opresie poprzedzającym $t < t_d$ obowiązywać będzie równanie B-S z parametrami przeskalowanymi czynnikiem $(1 - D)$. Rozwiązanie tego równania określające cenę opcji kupna ma postać wzoru (1) z współczynnikami d_1 i d_2 obliczonymi przy przeskalowanej cenie realizacji $K' = K/(1 - D)$

$$C_D(S, t) = C((1 - D)S, t; K) = (1 - D)C(S, t; K/(1 - D)). \quad (10)$$

Wzór ten łatwo uogólnić na przypadek wypłacania kilku dywidend: $C_D(S, t) = C(S_d, t)$. Wtedy we wzorze B-S zamiast bieżącej ceny akcji S należy przyjąć zmodyfikowaną cenę S_d , pomniejszoną o zdyskontowaną wartość dywidend. Np. dla dwóch dywidend D_1 i D_2 wypłacanych na w chwilach t_{d1} i t_{d2} zmodyfikowana cena równa się $S_d = S - D_1 \exp((T - t_{d1})r) - D_2 \exp((T - t_{d2})r)$.

Spółki akcyjne wypłacają dywidendy nie częściej niż kilka razy do roku, a więc cenę opcji kupna pojedynczej akcji można wyznaczyć przedstawioną metodą.

Przykład: Obliczymy cenę Blacka-Scholesa opcji kupna akcji o wartości bieżącej równej cenie realizacji $S = K = 100.0$ zł o okresie ważności 6 miesięcy = 0.5 roku. Założymy, że wolna od ryzyka stopa procentowa wynosi $r = 14\% = 0.14$ rocznie, a dzienny współczynnik zmienności wynosi 2%. Przyjmując 240 dni transakcyjnych w roku, otrzymamy roczny współczynnik zmienności $\sigma = 0.02 \times \sqrt{240} \approx 0.31 = 31\%$.

Korzystając z wzorów (3) i (4) otrzymujemy $\log(S/K) = \log(1) = 0$, $d_1 = 0.429$, $N(d_1) = 0.666$, $d_2 = 0.210$, $N(d_2) = 0.583$. Podstawiając te wyniki do wzoru (1) uzyskamy wartość ceny opcji kupna (przy braku dywidend) $C = 100 \text{ zł} \times 0.666 - 100 \text{ zł} \times \exp(-0.14 \times 0.5) \times 0.583 = 12.24 \text{ zł}$.

Założmy dodatkowo, że posiadacz akcji otrzyma dywidendy w wysokości $D_1 = D_2 = 0.50$ zł, które zostaną wypłacone za 2 i 5 miesięcy. Całkowita zdyskontowana wartość dywidend wynosi $0.50 \text{ zł} \times \exp(-0.14 \times 2/12) + 0.50 \text{ zł} \times \exp(-0.14 \times 5/12) = 0.960 \text{ zł}$, a więc zmodyfikowana bieżąca cena akcji równa się $S_d = 100.0 - 0.96 = 99.04 \text{ zł}$. Podstawiając tę wartość do wzoru B-S (1), przy niezmiennym parametrach K, r, σ, t otrzymamy cenę opcji zmniejszoną poprzez uwzględnienie obu dywidend $C_D(S, t) = C(S_d, t) = 11.60 \text{ zł}$.

4.2 Dywidendy wypłacane w sposób ciągły

W przypadku opcji na indeks giełdowy, który odzwierciedla notowania wielu spółek, uwzględnienie powyższą metodą wszystkich dywidend wypłacanych przez wszystkie spółki nie jest realne. Ponieważ różne dywidendy wypłacane są w różnych porach roku, w pierwszym przybliżeniu można założyć, że istnieje stała stopa dywidend q , która posiadaczowi instrumentu pierwotnego o wartości S w ciągu czasu δt przynosi dochód $qS\delta t$.

Ponieważ posiadacz opcji nie otrzymuje dywidend, do których uprawniony jest właściciel akcji, wartość opcji kupna przy wypłacie dywidend jest mniejsza niż wartość takiej samej opcji, gdy dywidendy nie są wypłacane. Ciągłą wypłatę dywidend o stopie q można uwzględnić zmniejszając w równaniu Blacka-Scholesa (22) stopę procentową r na $r - q$. Ponieważ warunki brzegowe równania B-S pozostają bez zmian ($C(t, 0) = 0$ oraz $C(S, T) = \max(S - K, 0)$ - patrz dodatek) jego rozwiązaniem jest

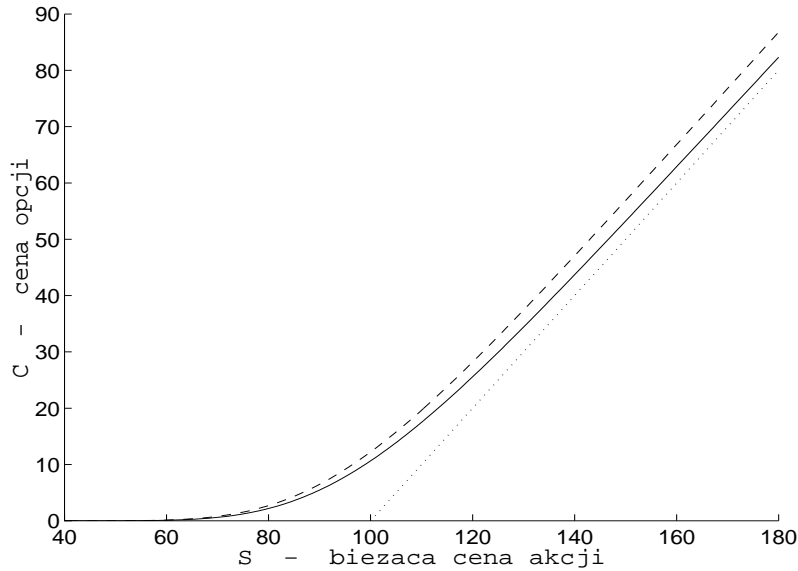
$$C_q(S, t) = e^{-q(T-t)} S N(d_{1q}) - K e^{-r(T-t)} N(d_{2q}), \quad (11)$$

gdzie zmodyfikowane argumenty są równe

$$d_{1q} = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad (12)$$

$$d_{2q} = \frac{\ln(S/K) + (r - q - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_{1q} - \sigma\sqrt{T - t}. \quad (13)$$

Otrzymane wyniki na zmodyfikowaną cenę opcji kupna C_q można wyrazić jako cenę wg. standardowego wzoru B-S (1) $C_q(S, t; q) = C(S_q, t)$ z ceną bieżącą S zastąpioną przez cenę pomniejszoną o zdyskontowaną dywidendę $S_q = S e^{-q(T-t)}$. Nietrudno pokazać, że ten wynik uzyska się także z omówionego w poprzednim paragrafie modelu dywidend dyskretnych, gdy liczba wypłacanych dywidend rośnie, a ich całkowita wartość pozostaje stała.



Rys.4 Wartość opcji kupna C w funkcji ceny akcji S według standardowego wzoru Blacka-Scholesa (bez dywidend - linia przerywana) oraz ze stałą stopą dywidend $q = 0.05$ (krzywa ciągła).

Powyższy rysunek pokazuje zależność wartości opcji kupna C od bieżącej ceny akcji S : linia przerywana oznacza standardowy wzór B-S (1) (bez dywidend), linia ciągła przedstawia zmodyfikowany wzór (11) z stałą stopą dywidend $q = 0.05$, a linia kropkowana oznacza zależność asymptotyczną, do której dąży wartość opcji w granicy $S \rightarrow \infty$. Inne parametry odpowiadają omówionemu przykładowi ($K = 100, r = 0.14, t = 0.5, \sigma = 0.31$).

Ten sam model stosuje się w przypadku opcji walutowych, dla których instrumentem pierwotnym jest waluta innego kraju. Wtedy rolę dywidend odgrywają odsetki, a współczynnik q posiada interpretację stopy procentowej w obcej walucie. Jeżeli instrumentem pierwotnym jest towar (np. metale, paliwo, produkty spożywcze), istotnym czynnikiem mogą być koszty jego przechowywania. Ponieważ wysokość tych kosztów zależy od ilości towaru i okresu przechowywania, można je traktować jak ciągle ujemne dywidendy. Dlatego dla opcji towarowych, współczynnik q jest *ujemny* i charakteryzuje względne koszty przechowania towaru.

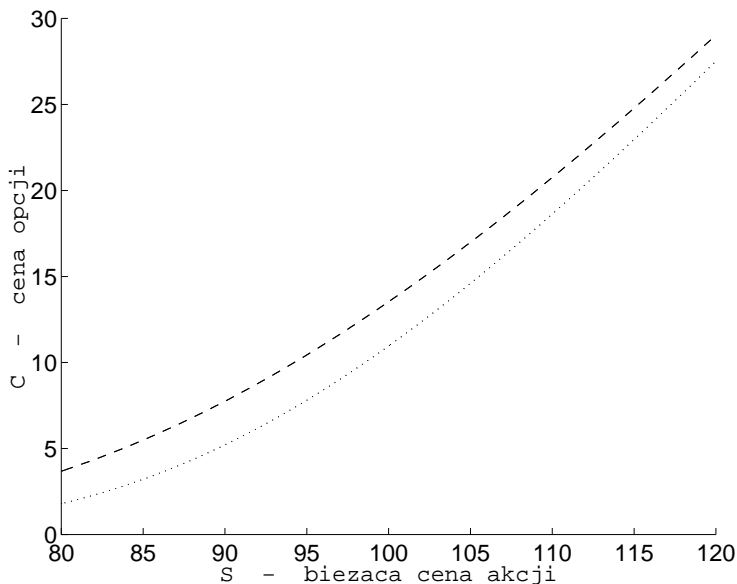
Przypadek, gdy wiele dywidend wypłacanych jest w nieregularnych odstępach czasu można opisywać modelem z losową wypłatą dywidend analizowanym w pracy Geske [13].

5 Koszty transakcji

Niezerowe koszty transakcji stanowią najistotniejszą różnicę pomiędzy idealnym rynkiem Blacka-Scholesa a rynkiem rzeczywistym. Jeżeli w modelu idealnym cena opcji odbiegałaby od ceny B-S, to powstałaby możliwość

arbitrażu. Dlatego też, założenie o nie istnieniu możliwości arbitrażu, w połączeniu z założeniem braku kosztów transakcji, pozwala na jednoznaczne określenie wartości ceny opcji w modelu Blacka-Scholesa.

Koszty transakcji, obecne na rynkach rzeczywistych, komplikują to zagadnienie i sprawiają, że teoria nie pozwala jednoznacznie wyznaczyć wartości opcji. Często dochodzi do sytuacji, w której funkcjonują różne ceny na ten sam instrument finansowy, a możliwości arbitrażu są wyeliminowane poprzez koszty operacji kupna/sprzedaży. W tym przypadku można wyznaczyć jedynie granice cen opcji, jak przedstawiono na rysunku. Górna granica odpowiada wartości ceny sprzedaży opcji kupna (*long call*), a dolna charakteryzuje cenę zakupu (*short call*). W ten sposób można uzasadnić występujące w praktyce „widełki”, czyli różnice pomiędzy cenami kupna i sprzedaży opcji.



Rys.5 Górna i dolna granica wartości opcji przy uwzględnieniu kosztów transakcji

Względne koszty kupna lub sprzedaży papierów wartościowych zależą od wielkości transakcji. W modelach matematycznych zakłada się, że koszty transakcji składają się z części stałej (opłata minimalna k_c) oraz części proporcjonalnej do wartości transakcji. Jeżeli a akcji o wartości S jest kupowanych ($a > 0$) lub sprzedawanych ($a < 0$) to koszty transakcji wyniosą $k_c + \kappa|a|S$. Przy dużych obrotach koszty stałe k_c można zaniedbać, a koszty proporcjonalne charakteryzowane są przez współczynnik κ .

Dynamiczna osłona sprzedanych opcji według teorii Blacka - Scholesa, polega na ciągłym dopasowywaniu zawartości portfela do aktualnych cen akcji (lub innego instrumentu pierwotnego). Na każdą sprzedaną opcję kupna wystawiający winien posiadać $\Delta := \frac{\partial C}{\partial S}$ akcji [1, 2]. Parametr osłony $\Delta = \Delta(S, t)$ dla opcji kupna jest większy od zera oraz mniejszy od jedności i określa optymalny stosunek pieniędzy zainwestowanych w akcje do wartości wystawionych opcji. Optymalny portfel składa się więc z wielokrotności jednej wystawionej opcji kupna o współczynniku Δ oraz ΔS akcji. Pozostała część pieniędzy ulokowana jest w obligacjach niewrażliwych na zmiany cen S . Parametr delta dla całego portfela, zdefiniowany analogicznie $\Delta_\pi := \frac{\partial \Pi}{\partial S}$, wynosi zero ($\Delta_\pi = -\Delta + \Delta + 0 = 0$), co określa się mianem *pozycji neutralnej*. W modelu B-S portfel można modyfikować w sposób ciągły, (założenie d), dzięki czemu parametr Δ_π można utrzymywać równy zero do końca okresu ważności opcji, co pozwala zredukować do zera ryzyko wystawiającego opcje kupna związane z ruchami cen akcji.

Realistyczne koszty transakcji powodują, że nie można (nie opłaca się) bardzo często zmieniać składu portfela. W obecności kosztów transakcji możliwa jest tylko *częściowa osłona* sprzedanej opcji: ryzyko nie może być zredukowane do zera. Bardzo częsta modyfikacja składu portfela znacznie zmniejsza jego wartość wskutek kosztów transakcji, podczas gdy za rzadkie zmiany składu portfela zwiększają jego wrażliwość na fluktuacje cen akcji.

Rozważmy dynamiczną osłonę sprzedanej opcji kupna stosując strategię osłony typu delta. Na każdą wystawioną opcję posiadamy w portfelu $a_1 = \Delta(t, S)$ akcji¹. Aby po upływie czasu τ portfel znów znaj-

¹niecałkowite wartości współczynnika Δ nabierają znaczenia przy dużym portfelu

dował się w pozycji neutralnej powinien on zawierać $a_2 = \Delta(t + \tau, S + \delta S)$ akcji, gdzie zgodnie z założeniami modelu B-S przyrost cen akcji $\delta S = \sigma S \sqrt{\tau}$. Wymaga to dokonania transakcji kupna (sprzedaży) $a = a_2 - a_1$ akcji. Rozwijając liczbę a_2 w szereg Taylora otrzymamy

$$a \approx \Gamma \delta S \approx \Gamma \sigma S \phi \sqrt{\tau}, \quad (14)$$

gdzie ϕ jest liczbą losową z rozkładu normalnego (wartość oczekiwana równa zero, wariancja równa jedności), a współczynnik $\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$ opisuje zmiany współczynnika Δ ze zmianami cen akcji S . Aby obliczyć oczekiwane koszty transakcji $\langle |a| \kappa S \rangle$ należy uśrednić równanie (14) po zmiennej losowej ϕ otrzymując

$$\langle |a| \kappa S \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \kappa \sigma S^2 |\Gamma| \sqrt{\tau}. \quad (15)$$

Powyższy wzór tłumaczy pochodzenie dodatkowego członu w uogólnionym równaniu Blacka - Scholesa (23) przedstawionym w poniższym dodatku. Zakładając, że parametr Γ jest dodatni² równanie to ma postać klasycznego równania B-S (22) z pomniejszonym współczynnikiem zmienności $\tilde{\sigma}_-$

$$\sigma^2 \rightarrow \tilde{\sigma}_-^2 = \sigma^2 - 2\kappa\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\tau}}. \quad (16)$$

Oznacza to, że efektywna wartość opcji dla kupującego $C_- = C(S, t; \tilde{\sigma}_-)$ jest obniżona, gdyż aby ją osłonić należy przeznaczyć część portfela na koszty transakcji.

Analizując sytuację wystawcy opcji należy zmienić wszystkie znaki w równaniu (23) na przeciwny, pozostawiając niezmienny człon kosztów transakcji, który zawsze obniża wartość portfela. Otrzymujemy wtedy równanie (22) z powiększonym współczynnikiem zmienności $\tilde{\sigma}_+$

$$\sigma^2 \rightarrow \tilde{\sigma}_+^2 = \sigma^2 + 2\kappa\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\tau}}, \quad (17)$$

które wyznacza górną granicę wartości opcji kupna $C_+ = C(S, t; \tilde{\sigma}_+)$, a więc sumę, którą wystawiający opcję chciałby otrzymać. Różnica cen kupna i sprzedaży (*bid-offer spread*) $\delta C = C_+ - C_-$ jest charakterystyczna dla rynku rzeczywistego. Rozwijając w szereg wzór B-S z dokładnością do wyrazu liniowego w κ otrzymamy

$$\delta C = 4\kappa S N(d_1) \sqrt{\frac{T-t}{2\pi\tau}}, \quad (18)$$

gdzie $N(d_1)$ jak poprzednio oznacza funkcję błędu od argumentu (3). Oczywiście różnica cen δC zanika przy kosztach transakcji dążących do zera ($\kappa \rightarrow 0$).

Powyższe wzory zostały wyprowadzone przez Lelanda [5], a parametr w nich występujący

$$L = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2\kappa}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad (19)$$

często nazywa się *liczbą Lelanda*. Zmodyfikowane wartości kwadratu współczynnika zmienności można zapisać prosto

$$\tilde{\sigma}_\pm^2 = \sigma^2 (1 \pm L). \quad (20)$$

Wyrażenie na dolną cenę sprzedaży $C_- = C(S, t; \tilde{\sigma}_-)$ ma sens dla $L < 1$. Przypadek dużych kosztów transakcji powodujących większą od 1 liczbę Lelanda, został niedawno analizowany przez Avellaneda i Parasa [9]. Ceny opcji w modelach dyskretnych przy uwzględnieniu kosztów transakcji były badane przez Boyle'a i Vorsta [7] oraz Bensaida i innych [8].

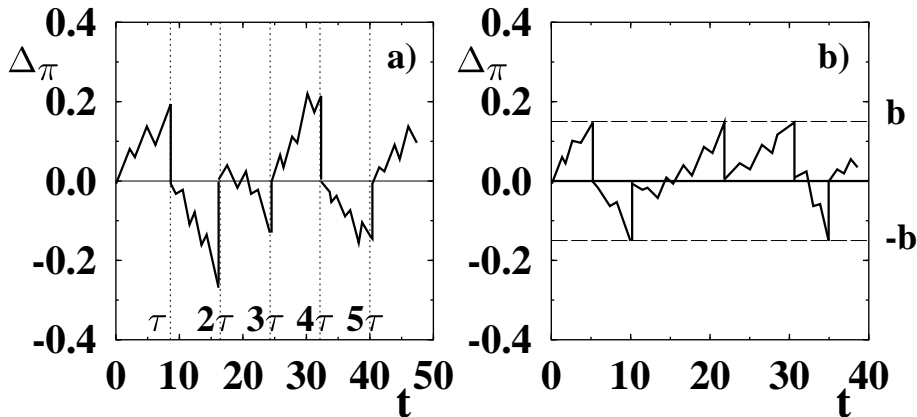
Wzory Lelanda umożliwiają analizę prostych strategii osłony, stosowanych na rynku rzeczywistym. Strategia osłony okresowej polega na zmianie składu portfela w równych odstępach czasu τ . Fluktuacje cen instrumentu pierwotnego powodują, że współczynnik Δ_π portfela zmienia się w czasie. Modyfikacje składu portfela dokonywana jest w chwilach $t + \tau, t + 2\tau, t + 3\tau, \dots, t + n\tau$ tak, aby doprowadzić do pozycji neutralnej, tj. aby $\Delta_\pi(t + n\tau) = 0$. Jeżeli okres zmian portfela τ jest bardzo mały, to liczba Lelanda L staje się duża, a zatem

²co jest prawdziwe dla modelu Blacka - Scholesa bez kosztów transakcji

koszty transakcji rosną. Zwróćmy uwagę, że w granicy $\tau \rightarrow 0$ liczba Lelanda rośnie nieskończenie. Z drugiej strony, bardzo duży odstęp czasowy τ , dający małe koszty transakcji, sprawia, że osłona nie jest efektywna, a wystawiający opcję narażony jest na duże ryzyko związane z fluktuacjami cen.

Wyznaczenie optymalnego okresu pomiędzy transakcjami osłony τ_* staje się więc zagadnieniem Markowitza, w którym maksymalizuje się funkcję użyteczności zależną zarówno od oczekiwanego dochodu (kosztów) jak i od przyjętego ryzyka. W praktyce można przyjąć [4], że parametr Lelanda L winien być rzędu jedności. Rozważając to zagadnienie jako problem minimalizacji ryzyka Bouchaud i Sornette [14] znaleźli strategię osłony, dla której optymalny czas pomiędzy transakcjami (przy uwzględnieniu typowych danych z giełdy w Paryżu) wynosi 9 dni.

Inną strategię osłony przy kosztach transakcji analizuje Figlewski [6]. Polega ona na częstym monitorowaniu zmian współczynnika portfela Δ_π i przeprowadzaniu transakcji osłaniających gdy odstępstwo od pozycji neutralnej przekroczy ustaloną barierę: $|\Delta_\pi| > b$. Wielkość dopuszczalnych odchyłeń b pozostaje wartością do ustalenia, analogiczną do okresu τ . W przypadku bardzo małej tolerancji b , koszty osłony będą bardzo duże, a przy dużej wartości parametru b znacznie rośnie ryzyko związane z wahaniami cen. Porównanie obu metod osłony przedstawiono na rysunku 6.



Rys.6 Osłona przy kosztach transakcji: a) w stałych odstępach czasu $\tau = 8$ dni; b) z zadana granicą tolerancji $b = 0.15$.

Mimo że obie metody osłony wydają się być dosyć kosztowne, szczególnie dla drobnych inwestorów, w badaniach numerycznych Figlewski otrzymał nieco lepsze wyniki (mniejsze ryzyko przy tym samym dochodzie, większy dochód przy tym samym ryzyku) dla metody osłony ze stałym współczynnikiem tolerancji b , determinującym zmienne odstępstwa pomiędzy kolejnymi transakcjami [6]. Oczywiście w praktyce metoda ta wymaga większego nakładu pracy związanego z koniecznością ciągłego (bardzo częstego) śledzenia cen na rynku.

6 Odstępstwa statystyki względnych zmian cen od rozkładu Gaussa

W modelu Blacka - Scholesa zakłada się, że rozkład względnych zmian cen $\delta_i = (S_{i+1} - S_i)/S_i$ dany jest rozkładem Gaussa

$$P_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (21)$$

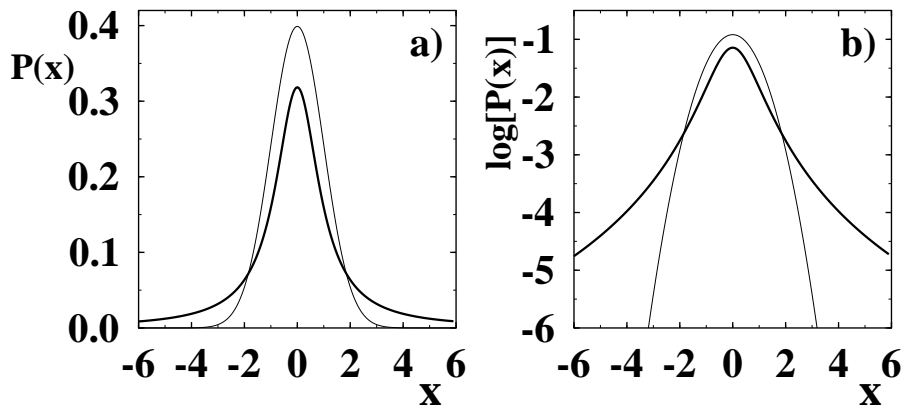
Rozkład ten jest znormalizowany $\int_{-\infty}^{+\infty} P_G(x) dx = 1$, μ oznacza wartość oczekiwaną daną przez całkę $\int_{-\infty}^{+\infty} x P_G(x) dx = \mu$, a σ^2 to wariancja rozkładu $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 P_G(x) dx = \sigma^2$.

Szczególna rola tego rozkładu w statystyce związana jest z własnością stabilności: jeśli x_1 i x_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi opisywanymi rozkładem Gaussa, to ich także suma $x_{12} = x_1 + x_2$ rozłożona jest według rozkładu Gaussa z odpowiednimi parametrami μ oraz σ . Co więcej, centralne twierdzenie graniczne zapewnia, że w granicy dużej liczby N losowych składników x_i , ich suma $y = \sum_{i=1}^N x_i$ opisana jest rozkładem Gaussa. Teza ta jest prawdziwa dla dowolnego rozkładu $P(x)$, opisującego zmienne x_i , dla którego istnieje wariancja (tj. całka $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P(x) dx$ jest zbieżna). Oznacza to, że dla każdego rozkładu prawdopodobieństwa (ze skończoną

wariancją) względnych zmian cen podczas jednego dnia, rozkład zmian cen w ciągu dłuższego czasu (tygodnia, miesiąca, roku) będzie coraz lepiej opisywany rozkładem Gaussa.³

Te własności zdecydowały o wykorzystaniu rozkładu Gaussa do opisu problemu wyceny opcji w pionierskiej pracy Bacheliera [15], a znacznie później w najbardziej znanej pracy z tej dziedziny autorstwa Blacka i Scholesa [1]. W istocie zachowanie się względnych zmian cen akcji na rzeczywistych rynkach z niezłą dokładnością można opisywać rozkładem Gaussa. Z drugiej strony, badając ruchy cen bawełny w USA w latach 1880-1953 Mandelbrot zauważył [16], że inne rozkłady prawdopodobieństwa pozwalają opisywać analizowane dane lepiej niż rozkład Gaussa. Rozkłady te należą do klasy rozkładów Lévy'ego, i charakteryzują się nieskończoną wariancją. W ten sposób Mandelbrot zwrócił uwagę na *zbiory fraktalne*, które można powiązać z niegaussowskimi procesami losowymi.

Rozkłady Lévy'ego parametryzuje się liczbą α , większą od zera i mniejszą od dwóch. Najbardziej znanym rozkładem tej klasy jest rozkład Cauchy'ego $P_C(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, dla którego $\alpha = 1$. W porównaniu z rozkładem Gaussa, dla którego $\alpha = 2$, rozkłady Lévy'ego charakteryzują się „grubymi ogonami”: duże fluktuacje są dla nich znacznie bardziej prawdopodobne, niż dla rozkładu Gaussa. Rysunek 6 przedstawia porównanie rozkładów Gaussa i Cauchy'ego w skali liniowej oraz logarytmicznej.



Rys.8 Porównanie rozkładu Gaussa $\alpha = 2$ i rozkładu Cauchy'ego $\alpha = 1$ (gruba krzywa): a) w skali liniowej, b) w skali logarytmicznej.

Duże fluktuacje cen opisywane rozkładami Lévy'ego wydają się mieć istotne znaczenie dla ekonomii i finansów. W niedawnej pracy Mantegna i Stanley [17] analizowali wahania indeksu *Standard & Poor 500*, opisującego giełdę amerykańską. Rzeczywiste zmiany wartości indeksu S&P znacznie lepiej dadzą się przybliżyć rozkładem Lévy'ego o parametrze $\alpha \approx 1.40$, aniżeli rozkładem Gaussa o $\alpha = 2$. Autorzy tej pracy proponują wykorzystywać w praktyce rozkłady Lévy'ego z „obciętymi” skrzydłami, dla których wariancja jest skończona.

Obecnie nie ma jeszcze wystarczającej liczby danych aby przeanalizować rozkłady fluktuacji cen na giełdzie

³Znaczenie rozkładu Gaussa w zagadnieniach finansowych zostało niedawno docenione przez władze Bundesbanku.

polskiej pod kątem parametru Lévy’ego. Natomiast odchylenia od rozkładu Gaussa, olbrzymie dla histogramu sporządzonego dla poszczególnych akcji (Rys. 1), są widoczne także na Rys. 2 przedstawiającego dane dla indeksu WIG. W szczególności waga skrzydeł rozkładu przy $\delta_s = \pm 10\%$ jest większa, niż wynikałoby to z rozkładu Gaussa o odpowiednio dopasowanej wariancji.

Odstępstwa statystyki względnych zmian cen od rozkładu Gaussa wpływają na cenę opcji oraz na optymalną strategię osłony. Zagadnienie to, rozpatrywane pod kątem minimalizacji ryzyka w pracy Aurella i innych [18], zostało krótko przedstawione w dalszej części materiałów tego sympozjum. W modelu Blacka - Scholesa zakłada się ponadto, że względne zmiany cen akcji nie są skorelowane. To założenie tylko do pewnego stopnia spełnione jest na rynku rzeczywistym. Zagadnienie wyceny opcji dla szerokiej klasy procesów skorelowanych rozważane jest w pracy Bouchaud i Sornette [14].

7 Uzupełnienie: równanie różniczkowe Blacka–Scholesa

Zakładając, że ruch cen akcji można opisać uogólnionym procesem Wienera, Black i Scholes wyprowadzili równanie [1], które wiąże zmianę wartości opcji kupna C w czasie ze zmianami wartości opcji związanymi z fluktuacjami cen instrumentu pierwotnego S

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0. \quad (22)$$

Powyzsze równanie różniczkowe cząstkowe, zwane często równaniem Blacka–Scholesa, należy do klasy równań parabolicznych drugiego rzędu. Parametr r oznacza stopę procentową bez ryzyka, a σ współczynnik zmienności cen akcji. Równanie B–S jest równaniem liniowym, a więc suma dwóch dowolnych rozwiązań równania będzie także stanowić jego rozwiązanie. Wzór (1) podający cenę opcji europejskiej $C = C(t, S)$ można uzyskać jako rozwiązanie powyższego równania, przy założeniu następujących warunków brzegowych: i) gdy ceny akcji spadają do zera także opcja kupna traci swą wartość $C(t, 0) = 0$; ii) gdy ceny akcji rosną, prawdopodobieństwo realizacji opcji zwiększa się, a jej wartość rośnie proporcjonalnie: $C \rightarrow S$ gdy $S \rightarrow \infty$; oraz iii) w chwili wygaśnięcia ważności opcji T , opcja kupna ma wartość, gdy cena akcji przekracza cenę realizacji: $C(S, T) = \max(S - K, 0)$.

Uwzględniając proporcjonalne koszty transakcji można uogólnić równanie B–S do postaci:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \kappa\sigma S^2 \sqrt{\frac{2}{\pi\tau}} \left| \frac{\partial C}{\partial S} \right| + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \quad (23)$$

gdzie „współczynnik tarcia” κ oznacza, że każda transakcja kupna/sprzedazy jednej akcji o wartości S kosztuje κS . W przeciwieństwie do standardowego równania B–S, równanie (23) jest nieliniowe i nie posiada analitycznego rozwiązania. Nieliniowość związaną z obecnością kosztów transakcji nietrudno wyjaśnić: wartość portfela składającego się z kilku opcji nie jest równa sumie wartości poszczególnych opcji, gdyż za każdą zmianę składu portfela trzeba zapłacić. Przykładowo, jeśli na portfel składają się dwie opcje kupna (jedna wystawiona i jedna kupiona) o tej samej cenie realizacji i tym samym okresie ważności, to taka pozycja jest całkowicie osłonięta. Jeżeli jednak, przy dużej liczbie innych kupionych/sprzedanych przez nas opcji, nie zauważymy tej równoważącej się pary opcji i będziemy osłaniać niezależnie każdą z nich, to poniesiemy straty na skutek niezerowych kosztów transakcji.

References

- [1] F. Black & M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* **3**, 637-659 (1973).
- [2] J.C. Cox and M. Rubinstein, *Option Markets*, Prentice Hall, 1985.
- [3] J.C. Hull, *Futures, Options and Other Derivative Securities*, Prentice Hall, 1994.
- [4] P. Wilmott, S. Howson, J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press, 1995.

- [5] H.E. Leland, Option pricing and replication with transaction costs, *Journal of Finance* **40**, 1283-1301 (1985).
- [6] S. Figlewski, Options arbitrage in imperfect markets, *The Journal of Finance* **44**, 1289 (1989).
- [7] P.P. Boyle and T. Vorst, Option replication in discrete time with transaction costs, *The Journal of Finance* **67**, 271-293 (1992).
- [8] B. Bensaid, J.-P. Lesne, H. Pagès and J. Scheinkman, Derivative asset pricing with transaction costs, *Mathematical Finance* **2**, 63-86 (1992).
- [9] M. Avellaneda and A. Paras, Optimal hedging portfolios for derivative securities in the presence of large transaction costs, *Applied Mathematical Finance* **3**, 21 (1996).
- [10] J. Cvitanić and I. Karatzas, Hedging and portfolio optimization under transaction costs: a martingale approach. *Mathematical Finance* **6**, 133-165 (1996).
- [11] F. Mercurio F. & A.C.F. Vorst, "Option pricing and hedging in discrete time with transaction costs", *Mathematics of Derivative Securities 1997, w druku*
- [12] R.C. Merton, Theory of rational option pricing, *Bell J. Econ. Manag. Sci.* **4**, 141 (1973).
- [13] R. Geske, Pricing of options with stochastic dividend yield, *J. Fin.* **33**, 617 (1978).
- [14] J.-P. Bouchaud & D. Sornette, The Black–Scholes option pricing problem in mathematical finance: generalization and extension for a large class of stochastic processes, *J. Phys. I (France)* **4**, 863 (1994).
- [15] L. Bachelier, Théorie de la Speculation, *Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup.* **17**, 21 (1900).
- [16] B.B. Mandelbrot, *J. Business* **36**, 394 (1963).
- [17] R. Mantegna & H.E. Stanley, *Nature* **376**, 46 (1995).
- [18] E. Aurell, J.-P. Bouchaud, M. Potters, and K. Życzkowski, Option pricing and hedging beyond Black-Scholes, *Europ. Finan. Manag.* 1997, w druku.