Geometria kwantowego splątania

Karol Życzkowski

Centrum Fizyki Teoretycznej PAN, Al. Lotników 32/44, 02-668 Warszawa

Teoria informacji kwantowej jest nową dziedziną wiedzy z pogranicza fizyki, matematyki i informatyki, która dotyczy przetwarzania informacji w układach kwantowych. Istnieje więcej możliwości konstrukcji algorytmów kwantowych niż klasycznych, gdyż zbiór stanów kwantowych jest zbiorem o większej liczbie wymiarów, niż odpowiadający mu zbiór stanów klasycznych. Celem prowadzonych badań było opisanie geometrii zbioru wszystkich stanów kwantowych, a w szczególności jego podzbioru zawierającego stany splątane, które są wykorzystywane przy projektowaniu algorytmów kwantowych.

Stosując reguły mechaniki kwantowej układowi fizycznemu przypisujemy stan kwantowy, czyli pewien zbiór elementów przestrzeni Hilberta. Zbiór czystych stanów kwantowych w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta, tworzy tak zwaną sferę Blocha. Zbiór stanów kwantowych opisywanych w N wymiarowej przestrzeni Hilberta tworzy rozmaitość o wymiarze 2N-2 zwaną zespoloną przestrzenią rzutową, $\mathbb{C}P^{N-1}$.

Opisując układ złożony, składający się z dwóch podzespołów, używa się przestrzeni Hilberta o strukturze iloczynu tensorowego, $H= H_1 \otimes H_2$, o wymiarze N=MK, gdzie M i K to wymiary przestrzeni służących do opisu poszczególnych podukładów. W takiej złożonej przestrzeni istnieją także stany kwantowe, które nie mają odpowiedników w mechanice klasycznej. Do takiej klasy stanów należą stany splątane.

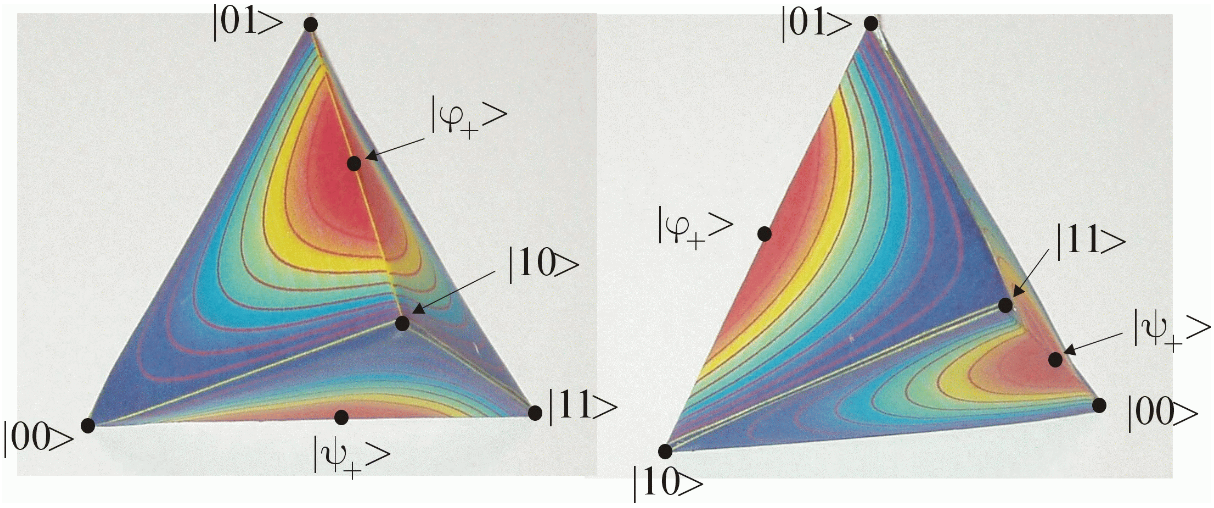
Stan kwantowy układu złożonego nazywamy *separowalnym*, jeśli można przedstawić go w postaci iloczynu tensorowego, $|\phi\rangle=|\varphi_1\rangle\otimes|\varphi_2\rangle$, gdzie oba stany $|\varphi_i\rangle$ należą do podprzestrzeni H_i. W przeciwnym wypadku, jeśli takie rozłożenie nie jest możliwe, stan kwantowy nazywamy *splątanym*. Splątanie stanów czystych można mierzyć entropią splątania, równą entropii von Neumanna zredukowanego operatora gęstości, $\mathrm{Tr}_2|\phi\rangle\langle\phi|$. W najprostszym przypadku, gdy N=4 i rozpatrujemy układ dwóch kubitów, (ang. *qubit=qunatum bit* – układ opisywany w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta), stanami maksymalnie splątanymi są stany Bella

$$|\psi_\pm\rangle=[\ |0\rangle \otimes |0\rangle\ \pm |1\rangle \otimes |1\rangle\ ] /\sqrt{2}\ ,$$
$$|\varphi_\pm\rangle=[\ |0\rangle \otimes |1\rangle\ \pm |1\rangle \otimes |0\rangle\ ] /\sqrt{2}\ ,$$

o entropii splątania równej ln 2. Ponieważ zredukowany operator gęstości dla stanów separowalnych jest projektorem, entropia splątania stanu separowalnego wynosi zero.

Wykorzystując pojęcie entropii splątania dokonaliśmy stratyfikacji całego 6-wymiarowego zbioru *C* stanów czystych układu dwóch kubitow na warstwy o tej samej wielkości splątania. O ile stany separowalne tworzą 4-wymiarową rozmaitość równoważną z iloczynem kartezjańskim dwóch sfer, $S^2 \times S^2$, to stany maksymalnie splątane wypełniają 3-wymiarową orbitę o topologii rzeczywistej przestrzeni rzutowej, $\mathbb{R}P^3$. Generyczna warstwa zawierająca stany o pewnej pośredniej wartości entropii splątania jest 5-wymiarowa i posiada topologię iloczynu kartezjańskiego, $S^2 \times \mathbb{R}P^3$.

Uzyskane wyniki pozwalają na lepsze zrozumienie geometrii całego zbioru stanów czystych *C* i zanurzonego w nim wyróżnionego podzbioru stanów maksymalnie splątanych. Ponieważ nie jest łatwo przedstawiać własności zbiorów sześciowymiarowych, na rys 1 umieszczamy 3-wymiarowy przekrój zbioru *C* otrzymany przez założenie, że wszystkie fazy opisujące stan są równe zeru, to znaczy, że macierz gęstości jest rzeczywista. Położenie punktu wewnątrz (lub na powierzchni) czworościanu ilustruje względne wagi czterech stanów bazy produktowej, $\{|00\rangle,|01\rangle,|10\rangle,|11\rangle\}$, wyznaczające badany stan. Kolor zimny odpowiada stanom separowalnym (które znajdują się wszystkich czterech wierzchołkach oraz 4 krawędziach czworościanu), natomiast kolor ciepły opisuje stany splątane. Dwa maksymalnie splątane stany Bella znaleźć można w środku pozostałych dwóch krawędzi czworościanu.



Rys.1 Entropia kwantowego splatania w czworościanie rzeczywistych stanów czystych dwóch kubitów: błękit – stany separowalne; czerwień - stany maksymalnie splatane.

W podobny sposób zbadaliśmy rozmaitość wszystkich stanów czystych układu złożonego $M \times M$, opisywanego w zespolonej przestrzeni Hilberta o wymiarze M^2. W tym przypadku zbiór wszystkich stanów czystych ma wymiar rzeczywisty $2M^2$-2. Przeprowadzając jego stratyfikację na warstwy stanów o takich samych parametrach kwantowego splątania wykazaliśmy, że zbiór stanów separowalnych ma wymiar $4(M-1)^2$ oraz topologię iloczynu kartezjańskiego dwóch zespolonych przestrzeni rzutowych, $\mathbb{C}P^{M-1}\times\mathbb{C}P^{M-1}$, podczas gdy zbiór stanów maksymalnie splątanych ma wymiar M^2-1 oraz topologię przestrzeni ilorazowej, U(M)/U(1).

Otrzymane wyniki pozwalają na kompletny opis geometrii stanów splatanych dla stanów czystych dowolnego kwantowego układu dwu składnikowego. Z drugiej strony otwartym pozostaje analogiczny problem dla układu wieloskładnikowego. Szczególnie ważne będzie przeprowadzenie podobnej analizy dla układu *n* kubitów – modelowego systemu stosowanego do tworzenia algorytmów obliczeń kwantowych.

Geometry of quantum entanglement

Summary
We investigate the set *C* of all quantum states. For composite, bi-partite systems, the entangled states are distinguished. We work out a stratification of *C* into leafs of states of the same degree of entanglement. In this way we analyse, how the manifold of maximally entangled states is embedded in the entire set *C*. Understanding the complex geometry of the set of entangled states is important for the theory of quantum information, since several quantum algorithms relay on entangled states.

Literatura

[1] M. Kuś, K. Życzkowski, *Geometry of entangled states*, Phys Rev. (2001) **A 63**, 032307(13).
[2] M. Sinołęcka, K. Życzkowski, M. Kuś, *Manifolds of equal entanglement for composite quantum systems*, Acta Phys. Pol. (2002) **B 33**, 2081-2095.