Strategia osłony i wycena opcji na rynku niegaussowskim

Erik Aurell[1], i Karol Życzkowski[2]

April 4, 1997

[1] Artificial Economy Project,
Center for Parallel Computers, KTH,
S-100 44 Stockholm, SWEDEN
E-mail: eaurell@pdc.kth.se
[2] Instytut Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego,
ul. Reymonta 4, 30 057 Kraków
E-mail: karol@chaos.if.uj.edu.pl

Abstract

Analizujemy rozszerzenie modelu Blacka–Scholesa dopuszczające dowolne (niegaussowskie) rozkłady względnych zmian cen akcji. Metodą minimalizacji ryzyka wystawcy opcji znajdujemy optymalną strategię osłony, którą można uważać za uogólnienie klasycznej strategii typu delta. Przyrównując do zera wartość oczekiwaną dochodu wystawcy opcji stosującego znalezioną strategię osłony obliczamy wartość europejskiej opcji kupna. Otrzymany wzór mozę służyc do szacowanie poprawek do wzoru Blacka–Scholesa w związku z odchyleniami rozkładu względnych zmian cen od rozkładu Gaussa.

1 Wstęp

Słynna teoria Blacka–Scholesa [1] wyróznia się dwiema zadziwiającymi własnościami:

i) optymalna strategia pozwala na zredukowanie do zera ryzyka wystawcy opcji, a więc gwarantuje idealną osłonę (*perfect hedging*);

ii) cena opcji nie zależy od sredniego wzrostu cen akcji lub innych instrumentów pierwotnych.

Teoria B–S oparta jest na założeniu, że względne zmiany cen są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Gaussa, a więc ceny akcji można opisać rozkładem log-normalnym. Taki model opisuje tylko w pierwszym przybliżeniu opisuje zmiany cen na rzeczywistych rynkach kapitałowych. Od czasów pionierskich prac Mandelbrota [2] rozwijane są modele, w których zmiany cen na giełdzie opisuje się procesami Lévy'ego. Numeryczna analiza coraz większej liczby danych rynkowych przeprowadzana w ostatnich latach [3], pozwala na dokładniejszą weryfikacje przydatności niegausowskich modeli rynku.[1] W tym artykule przedstawimy uogólnienie wzorów Blacka–Scholesa na cenę opcji dla dowolnego rozkładu cen instrumentu pierwotnego wzorując się na pracy [4].

Zaprezentowane podejście, oparte na idei Bouchaoud i Sornette [5], polega na:

a) znalezieniu optymalnej strategii osłony minimalizującej ryzyko,

b) wyznaczeniu ceny opcji wynikającej z warunku zerowej wartości oczekiwanej zysku wystawiającego opcję, przy stosowaniu optymalnej stratregii osłony.

[1] Mantegna i Stanley stwierdzili niedawno [3], że środkowa część rozkładu fluktuacji wartości amerykańskiego indeksu S&P 500 dobrze opisywana jest rozkładem Lévy'ego z parametrem $\alpha \approx 1.40$

Koncepcja rozwiązywanie problemu wyceny opcji poprzez minimalizację ryzyka, wprowadzona przez Follmera i Sondermanna [6], była także stosowana przez Schäla [7], Schweizera [8] oraz Mercurio [9].

2 Bilans stanu posiadania wystawiającego opcję

Rozważmy model idealnego rynku bez kosztów transakcji. Niech $t = 0$ oznacza chwilę początkową, a T oznacza okres ważności opcji. Załózmy, że transakcje dozwolone są w dyskretnych momentach czasu: $t = 0, \tau, 2\tau, ...k\tau, N\tau = T$, a stopa procentowa wolna od ryzyka wynosi r. W chwili $t = 0$ wystawiający opcję kupna sprzedaje ją za jej cenę $C[S_0, K, T]$, gdzie $S_0 = S(t = 0)$ oznacza bieżącą cenę akcji, a K cenę realizacji opcji. Strategia osłony wystawiającego opcję określona jest przez wektor $\phi_k(S_k)$ oznaczający liczbę akcji posiadanych od chwili $t_k = k\tau$ do momentu kolejnej transakcji t_{k+1}. Oczywiście liczba ϕ_k zależy od wartości akcji S_k w chwili t_k.

Zmiany stan posiadania ΔW wystawiającego opcję w związku z stosowaniem strategii ϕ dane są wzorem

$$\Delta W_{tr} = \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k(S_k)[S_{k+1} - e^{r\tau}x_k]e^{r(T-t-\tau)}. \tag{1}$$

W chwili $k\tau$ wystawiający opcję może trzymać w portfelu $\phi_k(S_k)$ akcji, lub sprzedać je otrzymując $S_k\phi_k(S_k)$ gotówki, która może być ulokowana w obligacjach o stopie procentowej r. W kolejnej chwili $(k+1)\tau$ portfel będzie warty $S_{k+1}\phi_k(S_k)$ w przypadku trzymania akcji, lub $e^{r\tau}S_k\phi_k(S_k)$ w przypadku ulokowania funduszy w obligacjach. Różnica pomiędzy tymi wielkościami oznacza zyska (stratę) w chwili $(k+1)\tau$. Po zdyskontowaniu tej wartości do momentu wygaśnięcia ważności opcji $T = N\tau$ uzyskamy $\phi_k(x_k)[x_{k+1} - e^{r\tau}x_k]e^{r(N-(k+1))\tau}$. Sumując N takich przyczynków, pochodzących od różnych momentów transakcji, otrzymamy równanie (1).

Jeżeli w chwili T cena akcji S_T przekroczy cenę realizacji K, to opcja zostanie zrealizowana, co wystawiającego opcję będzie kosztowało sumę $S - K$ (dla uproszczenia opuszczamy indeks pisząc $S = S_T$). Przeto całkowity bilans wystawiającego opcję ma postać

$$\Delta W = C[S_0, K, T]e^{rT} - \max(S - K, 0) + \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k(S_k)\delta S_k e^{rT-r(k+1)\tau} \tag{2}$$

gdzie wprowadzono notację: $\delta S_k \equiv [S_{k+1} - e^{r\tau}S_k]$. Zauważmy, że przyrost δx_k jest późniejszy niż moment $k\tau$, w którym ustalana jest strategia ϕ_k.

Aby uzyskać wartość oczekiwaną zysku $P = \langle \Delta W \rangle$, należy powyższe równanie bilansu uśrednić po zmiennych losowych S_k, oznaczających ceny akcji w chwili $k\tau$. Średni zysk wystawiającego opcję jest więc równy

$$P \equiv \langle \Delta W \rangle = C[S_0, K, T]e^{rT} - \langle \max(S - K, 0) \rangle + \sum_{k=0}^{N-1} \langle \phi_k(x_k) \rangle \langle \delta x_k \rangle e^{rT-r(k+1)\tau}, \tag{3}$$

gdzie $\langle x \rangle$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej x.

Jako miarę ryzyka dla wystawiającego opcję przyjmiemy średnie odchylenie standardowe zysku[2]

$$R \equiv \sqrt{< (\Delta W)^2 > -(< \Delta W >)^2} \tag{4}$$

[2]założenie, że wariancja istnieje jest naturalne dla danych doświadczalnych opisujących fluktuacje cen S_k na rynkach rzeczywistych. W modelach matematycznych często stosuje się tzw. "obcięte" rozkłady Lévy'ego *truncated Lévy distribution*, dla których wariancja także istnieje.

Poszczególne człony zdefiniowanego w ten sposób ryzyka, o strukturze podobnej do wzoru (3) zostały wypisane i szczegółowo omówione w pracach [5, 10]. Ryzyko R jest dodatnie lub równe zeru. Minimalizując ryzyko ze względu na wszystkie możliwe strategie ϕ_k, można otrzymać optymalną strategię osłony ϕ^* oraz minimalne ryzyko $R^* = R(\phi^*)$. Podstawiając znalezioną strategię ϕ^* do wzoru (3) i przyrównując średni zysk wystawcy opcji do zera ($P = 0$), otrzymamy równanie pozwalające wyznaczyć cenę opcji kupna C

$$C[S_0, K, T] = e^{-rT}\langle \max(S - K, 0)\rangle - \sum_{k=0}^{N-1} \langle \phi_k^*(S_k)\rangle \langle \delta S_k\rangle e^{-r(k+1)\tau} \tag{5}$$

3 Względny średni przyrost cen akcji równy zeru

Rozważmy prosty przypadek, w którym średni wzrost wartości akcji μ równy jest stopie bez ryzyka r. Zatem względny średni przyrost cen akcji (pomniejszony o stopę wzrostu wartości obligacji), jest równy zeru, $\langle \delta S_k\rangle = 0$. Ten przypadek nie jest bardzo ważny dla praktyków,[3] ale jest dobrym punktem wyjścia do dalszej analizy. Ponieważ $\langle \delta S_k\rangle = 0$, ostatni człon w równaniu na wartoąć opcji (5) znika.

Niech $P(S, T|S_0, 0)dS$ będzie prawdopodobieństwem, że cena akcji wynosząca S_0 w chwili $t = 0$, wyniesie S w chwili $t = T$. Wtedy wartość opcji dana jest całką

$$C_0[S, K, T] = e^{-rT}\langle \max(S - K, 0)\rangle \equiv e^{-rT} \int_K^\infty (S - K)P(S, T|S_0, 0)dS \tag{6}$$

Równanie (6) posiada strukturę standardowego wzoru Blacka–Scholesa i rzeczywiście sprowadza się do niego przy założeniu, że prawdopodobieństwo $P(S, T|S_0, 0)$ dane rozkładem log-normalnym, a średni wzrost wartości akcji μ równy jest stopie bez ryzyka r.

Aby znaleźć optymalną strategię osłony ϕ^* i oszacować minimalne ryzyko wystawcy opcji R^*, założymy, zę przeskalowane zmiany wartości akcji δS_k są niezależnymi zmiennymi losowymi: $\langle \delta S_k \delta S_l\rangle = D\delta_k^l$. Wielkość D, odpowiadająca współczynnikowi dyfuzji, określa szerokość rozkładu prawdopodobieństwa $P(S, \tau|S_0, 0)$ zmiany cen akcji podczas przedziału czasu o długości τ. Wtedy średnie z wielkości zależnych od dwóch różnych chwil czasu ($t = k\tau$ i $t = l\tau$) nie są skorelowane i pozwalają na zapisanie kwadratu z ryzyka $\langle \Delta W^2\rangle = R^2$, w postaci

$$\begin{aligned} \langle \Delta W^2\rangle &= \langle \Delta W^2\rangle_0 + D\tau \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^\infty dSP(S, t = k\tau|S_0, 0)\phi_k^2(S)e^{2r(T-t-\tau)} \\ &- \sum_{k=0}^{N-1} 2\tau \int_K^\infty dS'(S' - K)P(S', T|S, k\tau) \int_0^\infty dSP(S, t = k\tau|S_0, 0)\phi_k(S)\frac{S' - S}{T - t}e^{r(T-t-\tau)} \end{aligned} \tag{7}$$

W powyższym wzorze $\langle \Delta W^2\rangle_0$ oznacza ryzyko związane z wystawieniem opcji przy braku osłony ($\phi_k \equiv 0$). Minimalne ryzyko otrzymamy kładąc

$$\frac{\partial \langle \Delta W^2\rangle}{\partial \phi_k(S)} = 0 \tag{8}$$

dla wszystkich chwil czasu k oraz wartości akcji S. Ponieważ równanie (7) zawiera jedynie człony liniowe i kwadratowe w strategii $phi_k(S)$, różniczkowanie (8) pozwala uzyskać prosty wzór na optymalną strategię osłony

$$\phi_k^*(S) = \frac{1}{D} \int_K^\infty dS'(S' - K)P(S', T|S, t = k\tau)\frac{S' - S}{T - t}e^{-r(T-t-\tau)}. \tag{9}$$

[3] jeśli $\mu = r$, to kupowanie akcji daje ten sam średni zwrot co obligacje, a jest bardziej ryzykowne

Podstawiając ϕ_k^* do równania (7) otrzymamy

$$\langle\Delta W^2\rangle^* = \langle\Delta W^2\rangle_0 - D\tau \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^\infty dSP(S,t=k\tau|S_0,0)\phi_k^{*2}(S)e^{-r(T-t-\tau)}. \tag{10}$$

Przy założeniach teorii B–S wariancja $\langle\Delta W^2\rangle^* = R^2$ tożsamościowo znika [5]. Jest to zgodne z własnościami modelu Blacka–Scholesa, w którym możliwa jest osłona idealna.

Z drugiej strony, w ogólnym przypadku wielkość $\langle\Delta W^2\rangle^*$ jest dodatnia. Oznacza to, że w modelach realistycznych nawet najlepsza strategia osłony ϕ_k^* nie pozwala na zredukowanie ryzyka do zera. Przykładowo, dla typowych opcji o krótkim (miesięcznym) okresie waążności, ryzyko R wynosi około 1/4 wartości opcji[4]. Niezerowe ryzyko ponoszone przez wystawiającego opcję wpływa na wielkość widełek określających różnicę ceny sprzedaży i ceny zakupu opcji. W wyidealizowanym modelu B–S obie ceny są równe, a więc widełki cen znikają.

4 Niezerowy względny średni przyrost cen akcji

Rozpatrzmy realistyczny, ogólniejszy przypadek, w którym średnia stopa wzrostu wartości akcji μ przewyższa stopę bez ryzyka r. Wtedy wielkość $m = \langle\delta x_k\rangle = 0$, w przybliżeniu równa $\mu - r$, będzie dodatnia. W równaniu bilansu (2) wystąpi więc trzeci składnik $\langle\Delta W_{tr}\rangle$, odpowiadający za zmianę stanu posiadania wystawiającego opcję w związku z przeprowadzanymi transakcjami osłony:

$$\langle\Delta W_{tr}\rangle = m \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^\infty dSP(S,t=k\tau|S_0,0)\phi_k^*(S)e^{-r(t+\tau)}. \tag{11}$$

Załózmy, że parametr m jest mały w porównaniu do wielkości $\sigma\sqrt{T}$, oznaczającej średnią względną zmianę cen akcji w ciągu okresu ważności opcji T. W tym przypadku można potraktować człon $\langle\Delta W_{tr}\rangle$ jako zaburzenie i przedstawić wzór na ceną opcji w postaci szeregu w parametrze m. Używając wzoru na optymalną strategię (9) uzyskamy, jako pierwsze przybliżenie, cenę opcji z wyrazem liniowym w m.

Nasze rozwaązania prowadzimy dla dowolnego rozkładu $P(S,N|S_0,0)$, określającego prawdopodobieństwo, że w ciągu czasu T cena akcji zmieni się z S_0 na S. Załóżmy, że rozkład ten można przedstawić w postaci transformaty Fouriera

$$\tilde{P}(y) = \int_{-\infty}^\infty P(S,N|S_0,0)\exp(iSy)dS, \tag{12}$$

a następnie rozwinąć w szereg *kumulant* c_n. Kumulanty są zdefiniowane poprzez szereg

$$\tilde{P}(y) = \exp\Big[\sum_{n=2}^\infty \frac{c_n(iy)^n}{n!}\Big], \tag{13}$$

gdzie parametr c_2 jest wariancją rozkładu: $c_2 = ND\tau = \sigma^2 T$, a parametr c_4 jest jego kurtozą. Dla rozkładu Gaussa tylko drugi kumulant c_2 rózni się od zera, a wszystkie wyższe znikają. Rozwinięcie w kumulanty można zastosować do Wyrażenia $(S'-S)P(S',N|S_0,0)$, występującego we wzorze (9),

$$(S'-S)P(S',N|S_0,0) = \int_{-\infty}^\infty dy\tilde{P}(y)\frac{\partial}{\partial iy}\exp[iy(S'-S)] = \sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n c_n}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial S^{n-1}}P(S',N|S,0). \tag{14}$$

Podstawiając je do wyrażenia (9) otrzymamy optymalną strategię

$$\phi_k^*(S) = \frac{1}{c_2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n c_n}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial S^{n-1}}C[S,K,T-k\tau]. \tag{15}$$

Nietrudno zauważyć, że w przypadku Gaussowskim ($c_n = 0$ dla $n > 2$) w powyższej sumie pozostaje tylko pierszy składnik, który daje standardową strategię osłony typu *delta* $\phi_k^*(S) \sim \partial C[S,K,T-k\tau]/\partial S$, jaką przewiduje model Blacka–Scholesa.

Wstawiając optymalną strategię (15) do równania (11) i całkując przez części otrzymamy rozwinięcie członu $\langle \Delta W_{tr}\rangle$, który podstawiony do wzoru (5) daje następującą cenę opcji C_m przy niezerowym parametrze m

$$C_m[S_0,K,T;m] = C_{m=0}[S,K,T] - \frac{m}{c_2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{c_n}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-3}}{\partial x'^{n-3}}P_0(S',N|S_0,0)|_{S'=K} \tag{16}$$

z dokładnością do wyrazów m^2.

W przypadku Gaussowskim $c_n = 0$ dla wszystkich $n \geq 3$, więc $C_m = C_0$, z dokładnością do wyrazów liniowych w m. Tą równość jest prawdziwa także w wyższych rzędach w m [11], co jest zgodne ze znanym faktem, że w modelu Gaussowskim cena opcji według Blacka-Scholesa nie zależy od średniej stopy wzrostu akcji μ.

Z drugiej strony, dla symetrycznych rozkładów prawdopodobieństwa z "grubymi" skrzydłami ($c_3 = 0$ oraz $c_4 > 0$), dodatni współczynnik m spowoduje podwyższenie wartości opcji poza ceną ($S_0 < K$) oraz obniżenie wartości opcji w cenie ($S_0 > K$).

Zauważmy ponadto, że wyraęnie (16) można przepisać w postaci analogicznej do wzoru (6)

$$C_m[S_0,K,T] = e^{-rT}\int_K^{\infty} dS(S-K)\hat{P}(S,T|S_0,0) \tag{17}$$

gdzie zmodyfikowany rozkład $\hat{P}$ dany jest wzorem

$$\hat{P}(S,T|S_0,0) = P_0(S,T|S_0,0) - e^{rT}\frac{m}{c_2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{c_n}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}P_0(S,N|S_0,0) \tag{18}$$

Co prawda rozkład $\hat{P}$ jest znormalizowany ($\int_{-\infty}^{\infty}\hat{P}(S)ds = 1$), ale $\hat{P}(S)$ może przyjmować wartości ujemne, więc nie jest rozkładem prawdopodobieństwa. Natomiast niezależnie od wartości parametru m rozkład $\hat{P}$ nie jest

Z przyjemnością dziekujemy za wspólpracę J.-P. Bouchaud. Ta praca powstała dzięki wsparciu udzielonego w ramach współpracy KBN i Szwedzkiego Komitetu Nauki.

References

[1] F. Black & M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* **3**, 637-659 (1973).

[2] B.B. Mandelbrot, *J.Business* **36**, 394 (1963).

[3] R. Mantegna & H.E. Stanley, *Nature* **376**, 46 (1995).

[4] E. Aurell, J.–P. Bouchaud, M. Potters, and K. Życzkowski, Option pricing and hedging beyond Black-Scholes, *Europ. Finan. Manag.* 1997, *w druku*.

[5] J.-P. Bouchaud & D. Sornette, The Black–Scholes option pricing problem in mathematical finance: generalization and extension for a large class of stochastic processes, *J. Phys. I (France)* **4**, 863 (1994).

[6] H. Follmer & D. Sondermann, w *Essays in honor of G. Debreu*, W. Hildenbrand, A. Mas-Collel Etaus, North Holland (1986).

[7] M. Schäl, *The Mathematics of Operations Research* **19**, 121-131 (1994).

[8] M. Schweizer, *The Mathematics of Operations Research* **20**, 1-32 (1995).

[9] F. Mercurio, *Claim pricing and Hedging under Market Imperfections*, Ph.D. thesis, Erasmus University, Rotterdam (1996).

[10] E. Aurell & K. Życzkowski, "Option pricing & Partial Hedging: Theory of Polish Options" (1995), *preprint*

[11] J.-P. Bouchaud, M. Potters & D. Sornette, *Theory of Financial Risk: Portfolios and Options*, (1997) *w druku.*