

Stany grafowe i splątanie w układach wielocząstkowych

Jakub Janarek

IF UJ

18 maja 2015

Plan prezentacji

Bramki kwantowe

Grafy i stany grafowe

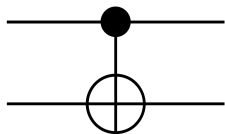
Stany grafowe – przykłady

Uogólnienie na qudity

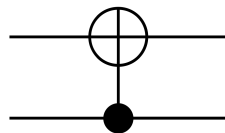
Podsumowanie

Controlled-NOT

Nielokalna bramka kwantowa; bit *kontrolny* oraz *roboczy*.



$$U_{\text{CNOT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

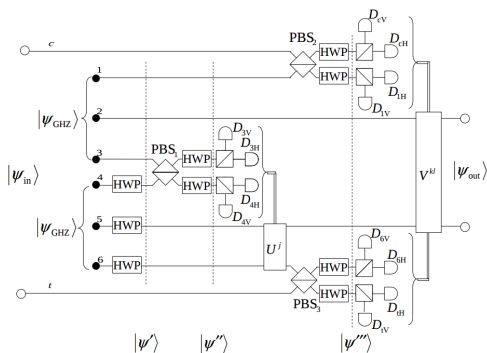


$$U'_{\text{CNOT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Controlled-NOT

Najważniejsza bramka – każdą dowolną bramkę można zbudować wykorzystując CNOT, bramkę Hadamarda oraz zmiany fazy:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\theta} \end{pmatrix}$$



Controlled-Z

Nielokalna bramka powodująca zmianę fazy.

$$U_{CZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Działanie tej bramki można zapisać także jako:

$$U_{CZ} |j\rangle |k\rangle = (-1)^{j \cdot k} |j\rangle |k\rangle$$

Dlaczego jest nazywana bramką Controlled-Z?

Dowolna bramka Controlled-U

Jeśli rozpatrzmy *dowolny* unitarny operator:

$$U = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} \\ x_{10} & x_{11} \end{pmatrix}$$

Działanie *Controlled-U*
będzie polegało na:

$$|0\rangle |0\rangle \rightarrow |0\rangle |0\rangle$$

$$|0\rangle |1\rangle \rightarrow |0\rangle |1\rangle$$

$$|1\rangle |0\rangle \rightarrow |1\rangle U|0\rangle$$

$$|1\rangle |1\rangle \rightarrow |1\rangle U|1\rangle$$

A macierz takiej bramki:

$$CU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{00} & x_{01} \\ 0 & 0 & x_{10} & x_{11} \end{pmatrix}$$

Graf

Graf

Grafem nieskierowanym G nazywamy parę V oraz E , taką że $V \subset \mathbb{N}$ i $E \subset [V]^2$. Zbiór V nazywamy wierzchołkami, natomiast E krawędziami grafu.

Macierz sąsiedztwa

Macierz sąsiedztwa Γ_G , związana z grafem G o wierzchołkach $V = a_1, a_2, \dots, a_N$ jest macierzą $N \times N$ o elementach:

$$(\Gamma_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \{a_i, a_j\} \in E \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

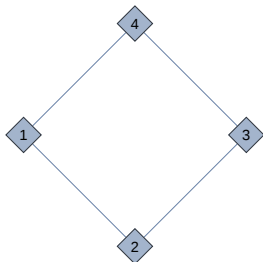
Graf

Sąsiedztwo wierzchołka

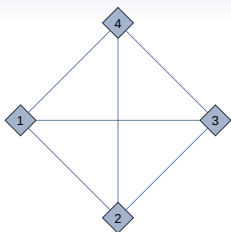
Sąsiedztwem N_a wierzchołka a określamy wszystkie wierzchołki b , dla których zachodzi:

$$\{a, b\} \in E$$

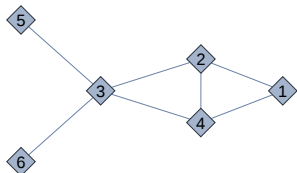
Przykłady:



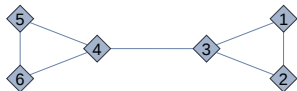
$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Stany grafowe (podejście matematyczne)

Każdemu grafowi można przypisać odpowiadający mu stan kwantowy w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{\otimes |V|}$. Każdy wierzchołek *numeruje* qubit. Wierzchołkom przypisuje się operatory:

$$K_G^{(a)} = \sigma_x^{(a)} \prod_{b \in N_a} \sigma_z^{(b)} = \sigma_x^{(a)} \prod_{b \in V} \left(\sigma_z^{(b)} \right)^{\Gamma_{ab}}.$$

Operatory dla różnych wierzchołków komutują i tworzą bazę w przestrzeni \mathcal{H}_V . Ich stanami własnymi są *stany grafowe* $|G\rangle$.

Stany grafowe

Innym sposobem otrzymania stanów grafowych jest zadziałaniem na stan $|+\rangle^{\otimes |V|}$ sekwencją komutujących operatorów $U^{(a,b)}$:

$$|G\rangle = \prod_{(a,b) \in E} U^{(a,b)} |+\rangle^{\otimes |V|}.$$

W przypadku qubitów:

$$U^{(a,b)} = U_{CZ}^{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Każda krawędź oznacza oddziaływanie pomiędzy określonymi cząstkami.

Stany grafowe

LU -równoważność

Jeśli dla dwóch grafów $G(E, V)$ oraz $G'(V, E')$ istnieje lokalne U takie, że

$$|G\rangle = U |G'\rangle,$$

to nazywamy je LU -równoważnymi.

LU -równoważność nie odpowiada równoważności grafów takim jak permutacja wierzchołków, itp.

Miara Schmidta

Każdy stan kwantowy $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}^{(N)}$ złożony z N części można przestawić jako:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^R \alpha_i |\psi_i^{(1)}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_i^{(N)}\rangle,$$

$$|\psi_i^{(n)}\rangle \in \mathcal{H}^{(n)}.$$

Miara Schmidta

Miara Schmidta związana ze stanem $|\psi\rangle$ zdefiniowana jest jako:

$$E_S(|\psi\rangle) = \log_2 r,$$

gdzie r jest najmniejszym R składników powyższego rozkładu.

Miara Schmidta

Dla układów mających tylko dwie części ($N = 2$) *miara Schmidta* sprowadza się do *stopnia Schmidta*.

$$E_S(|\text{Bell}\rangle) = 1$$

$$E_S(|\text{GHZ}\rangle) = 1$$

$$E_S(|\text{W}\rangle) = \log_2(3)$$

Dla stanów separowalnych $E_S(|\psi\rangle_{sep}) = 0$, posiada wiele cech przydatnych w analizie układów wielocząstkowych.

Zwykle jest bardzo trudna do wyznaczenia (konieczność znalezienia minimalnego R).

Grafy 2-kubitowe

stan separowalny (brak krawędzi → brak oddziaływania)



$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



stan Bella

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Grafy 3-kubitowe

Trzy kubity pozwalają na więcej możliwości:



$$|\text{Bell}\rangle \otimes |0\rangle$$



$$|0\rangle \otimes |\text{Bell}\rangle$$



$$|\text{GHZ}\rangle$$

Wszystkie stany
mają wartość
miary Schmidta
 $E_S = 1$

Grafy 3-kubitowe

Jak wyglądają takie bramki?

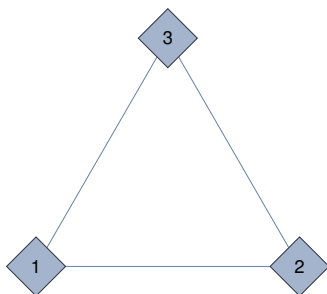
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Jak wygląda bramka dla trzeciego grafu?

Grafy 3-kubitowe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jeszcze raz (ostatni) 3 kubity



Wyliczony stan to:

$$|000\rangle + |101\rangle + |011\rangle - |110\rangle$$

Przez porównanie *inwariantów* dla trójkubitowych stanów czystych dochodzi się do wniosku, że odpowiada to stanowi GHZ ("*preliminary*").

4 kubity

W przypadku grafów o 4 wierzchołkach istnieją 64 grafy (uwzględniając permutacje).

Przestrzeń ma 16 wymiarów, co znacznie komplikuje "intuicyjną" analizę wyliczanych stanów.



$$|\text{Bell}\rangle \otimes |00\rangle$$

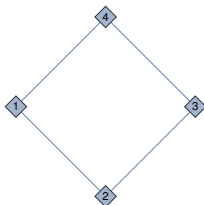


$$|\text{GHZ}\rangle \otimes |0\rangle$$

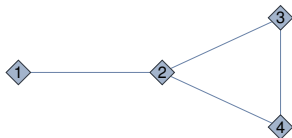
4 kubity



$$\frac{1}{2} (|1100\rangle + |1011\rangle + |0000\rangle + |0111\rangle)$$



$$\frac{1}{\sqrt{8}} (-|1101\rangle + |1110\rangle + |0101\rangle - |0111\rangle + \\ + |1001\rangle + |1010\rangle + |0000\rangle + |0011\rangle)$$



$$\frac{1}{\sqrt{8}} (-|0000\rangle + |0011\rangle + |0101\rangle - |0111\rangle + \\ + |1011\rangle - |1101\rangle + |1000\rangle + |1110\rangle)$$

Przy większej ilości cząstek analiza i porównanie stanów staje się coraz trudniejsza. Jednak przedstawienie za pomocą grafów pozwala na określenie oddziaływania pomiędzy cząstkami.

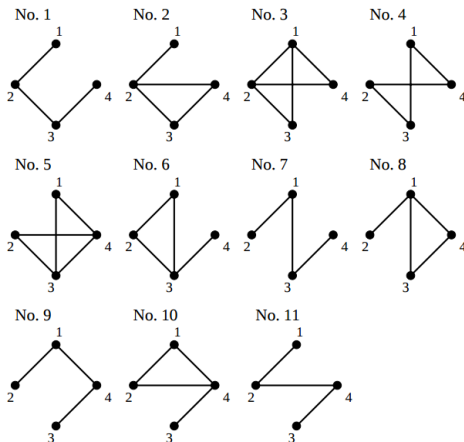
W literaturze – intuicyjne określenie splątania: *edit*.

Do szukania LU -równoważnych grafów można wykorzystywać także pewne przekształcenie:

$$U_a(G) = (-i\sigma_x^{(a)})^{1/2} \prod_{b \in N_a} (i\sigma_z^{(b)})^{1/2},$$

stosując je wielokrotnie do danego stanu $|G\rangle$ pozwala ono znajdować pełne zbiory grafów LU -równoważnych do G .

Zastosowanie tej metody do pierwszego grafu pozwala na otrzymanie kolejnych 10 LU -równoważnych grafów:



qudity

Uogólnienie na *qudity* jest naturalne. Dla d -wymiarowych *quditów* graf może mieć wielokrotne krawędzie (przypisane wagi). Elementy macierzy sąsiedztwa będą mogły przyjmować wartości $0, 1, \dots, d - 1$. Podobnie jak wcześniej:

$$|G\rangle = \prod_{(a,b) \in E} \left(U^{(a,b)} \right)^{\Gamma_{ab}} |+\rangle^{\otimes V}.$$

Zmieni się postać operatora odpowiadającego za krawędź:

$$U^{(a,b)} |j\rangle_a |k\rangle_b = \omega^{j \cdot k} |j\rangle_a |k\rangle_b,$$

gdzie $\omega = e^{\frac{2\pi i}{d}}$.

qudity

Zmieni się także baza stanów początkowych, $|+\rangle = |\bar{0}\rangle$.

$$|\bar{i}\rangle = U^{-1} |i\rangle,$$

A operator U zdefiniowany jest przez:

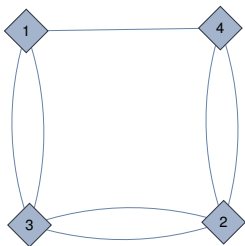
$$U |i\rangle = \sum_j \omega^{i \cdot j} |j\rangle,$$

analogicznie do kwantowej transformaty Fouriera. Dodatkowo wprowadzone są *uogólnione operatory Pauliego*:

$$U_Z |j\rangle = \omega^j |j\rangle$$

$$U_X |j\rangle = |j+1\rangle$$

qudity – przykład



Odpowiada on stanowi
AME(4,3):

$$\frac{1}{3}(|0000\rangle + |0112\rangle + |0221\rangle + \\ + |1011\rangle + |1120\rangle + |1202\rangle + \\ + |2022\rangle + |2101\rangle + |2210\rangle)$$

Stany *absolutely maximally entangled* są uogólnionymi stanami Bella.

Istnieją metody otrzymywania stanów innych AME przy wykorzystywaniu grafów.

Podsumowanie

- stany grafowe pozwalają na "obrazowe" przedstawianie splątania w układach wielocząstkowych
- można wykorzystywać miary splątania
- łatwo uogólnić je na *qudity*, dzięki czemu możliwe jest badanie dowolnych stanów kwantowych

Dziękuję za uwagę!

Literatura



M. Hein, J. Eisert, and H. J. Briegel, Multiparty entanglement in graph states, Phys. Rev. A 69, 062311



A. Sudbery, On local invariants of pure three-qubit states, J. Phys. A: Math. Gen. 34 643



A. Keet, B. Fortescue, D. Markham, and B. C. Sanders, Quantum secret sharing with qudit graph states, Phys. Rev. A 82, 062315



W. Helwig, Absolutely Maximally Entangled Qudit Graph States, arXiv:1306.2879