Czy świat jest dyskretny?

Anna Szczepanek, Anna Szymusiak

Instytut Matematyki UJ

26 stycznia 2015

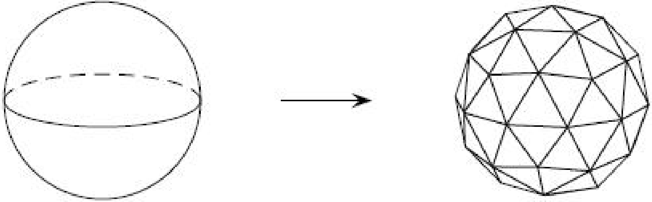
na podstawie:

Corsin Pfister, Stephanie Wehner. If no information gain implies no disturbance, then any discrete physical theory is classical. *Nature Communications* 4, 1851 (2013)

Czy świat jest dyskretny?

To znaczy:

Czy jest możliwe, że przestrzeń stanów układu kwantowego ma skończenie wiele stanów czystych?



Bloch ball   discretized Bloch ball

Rozsądne (w sensie fizycznym) założenie:

Każdy pomiar może być wykonany w taki sposób, że stany, które dają pewne wyniki (tzn. wyniki z prawdopodobieństwem 1) nie ulegają zmianie pod wpływem pomiaru.

Kwantowo mamy: wzrost informacji o układzie powoduje zmianę stanu układu

Dwa podstawowe pojęcia dowolnej teorii fizycznej:

STAN

POMIAR

STANY:

1. Stany (znormalizowane) tworzą WYPUKŁY podzbiór Ω_A pewnej rzeczywistej przestrzeni wektorowej A.
2. Wymiar A może być dowolnie duży, ale skończony.
3. Zbiór stanów Ω_A jest ZWARTY.

STANY CZYSTE – punkty ekstremalne Ω_A
STANY MIESZANE – pozostałe

Każdy stan jest kombinacją wypukłą stanów czystych.

Będziemy rozważać też stany podnormalizowane (?) $\Omega_A^{\leq 1} \subset A$ będące przeskalowanymi elementami Ω_A przez czynnik $0 \leq \lambda \leq 1$.

POMIAR:

POMIAREM nazywamy skończony zbiór $\mathcal{M} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ odwzorowań liniowych $f_i : A \to \mathbb{R}$ nazywanych **EFEKTAMI**, z których każdy odpowiada jakiemuś wynikowi pomiaru. Dla $\omega \in \Omega_A$ wartość $f_i(\omega)$ jest interpretowana jako **prawdopodobieństwo** uzyskania wyniku i jeśli układ był przed pomiarem w stanie ω.

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = u_A, \text{ gdzie } u_A(\omega) = 1 \ \forall \omega \in \Omega_A$$

Efektami czystymi nazywamy punkty ekstremalne (wypukłego) zbioru efektów.

Założenie:

Każdy taki zbiór efektów jest poprawnym (fizycznym) pomiarem.

PRZYKŁADY:

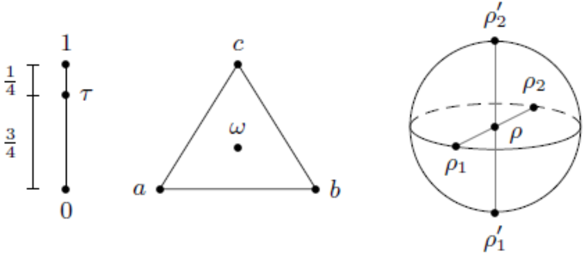
- Teoria kwantowa:

$\Omega_A = \mathcal{S}(\mathcal{H})$ (operatory gęstości)
$A = \text{Herm}(\mathcal{H})$
Pomiar – zdefiniowany przez POVM, czyli zbiór $\{F_i\}_{i=1}^n$ operatorów nieujemnie określonych dających rozkład jedności na $\mathcal{H}$; efekty dane są wzorami: $\rho \to \text{tr}(F_i \rho)$

efekty czyste = rzutowania

- Teoria klasyczna:

Ω_A – sympleks
Wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między stanami a rozkładami prawdopodobieństwa na stanach czystych, które są całkowicie rozróżnialne.
Pomiar – prawdopodobieństwa wyników pomiaru odpowiadają współczynnikom kombinacji wypukłej stanów czystych.

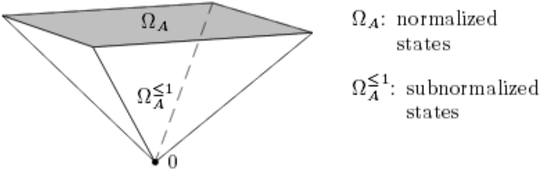


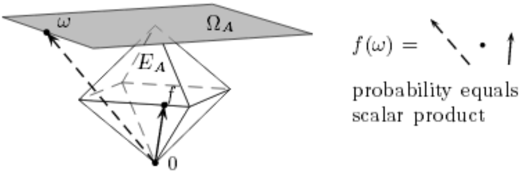
$\tau = \frac{1}{4}\text{“0”} + \frac{3}{4}\text{“1”}$ $\quad \omega = \frac{1}{3}(a+b+c)$

$$\rho = \frac{1}{2}\rho_1 + \frac{1}{2}\rho_2 = \frac{1}{2}\rho_1' + \frac{1}{2}\rho_2'$$

- „Światy pudełkowe"(*„box worlds", generalized non-signalling theories*)
  - *PR-box*

$\Omega_A := \text{conv}\{(1,0,1),(0,1,1),(-1,0,1),(0,-1,1)\}$ – stany $=$ *gbity*



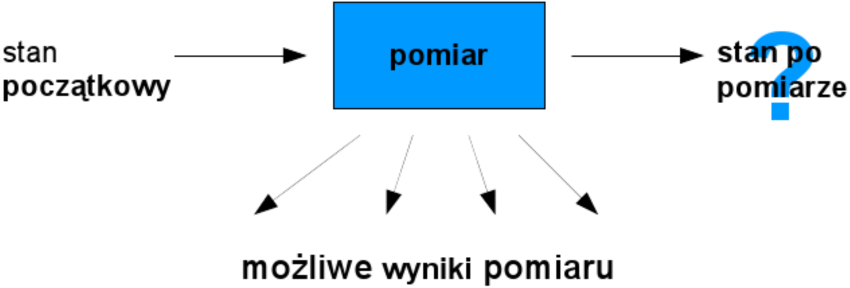


Każdy efekt czysty daje pewny wynik dla więcej niż jednego gbitu.

- Inne teorie dyskretne
  - modele wielokątowe
- teorie ściśle wypukłe

  qubity – ściśle wypukłe

  wyżej wymiarowe układy kwantowe – nie



Jeśli chcemy dokonać kilku następujących po sobie pomiarów, potrzebujemy znać stan po pomiarze.

Trzy scenariusze:

A

Obserwator odczytuje wynik pomiaru i opisuje stan po pomiarze w zależnosci od uzyskanego wyniku.

B

Obserwator opisuje stan po pomiarze przez stan nieznormalizowany dla hipotetycznego przypadku pojawienia się danego wyniku; prawdopodobieństwo takiego wyniku odpowiada wtedy normie tak opisanego stanu.

C

Obserwator *nie* odczytuje wyniku pomiaru i opisuje stan po pomiarze wiedząc jedynie, że pomiar miał miejsce.

Przykład (teoria kwantowa)

Pomiar – PVM $\mathcal{M} = \{P_i\}_{i=1}^{n}$

Stan po pomiarze jest zdefiniowany przez **instrument Lüdersa – von Neumanna**

A

$$\rho \to \frac{P_k \rho P_k}{\operatorname{tr}(P_k \rho)}$$

B

$$\rho \to P_k \rho P_k$$

C

$$\rho \to \sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr}(P_i \rho) \frac{P_k \rho P_k}{\operatorname{tr}(P_k \rho)} = \sum_{i=1}^{n} P_i \rho P_i$$

Transformacją

na abstrakcyjnej przestrzeni stanów A nazywamy odwzorowanie liniowe $T : A \to A$ takie, że $T(\Omega_A) \subset \Omega_A^{\leq 1}$.

Transformacją pomiarową

dla efektu f (w skrócie f-transformacją) nazywamy transformację T o własności

$$u_A \circ T = f$$

Postulat

no information gain $\Longrightarrow$ no disturbance

Każdy czysty pomiar może być wykonany w taki sposób, aby stany, dla których wynik tego pomiaru jest pewny, pozostawały niezmienione.

Dla każdego czystego efektu f istnieje taka transformacja $T_f : A \to A$ spełniająca $u_A \circ T_f = f$, że dla każdego $\omega \in \Omega_A$ takiego, że $f(\omega) = 1$, zachodzi $T(\omega) = \omega$.

Obserwacja

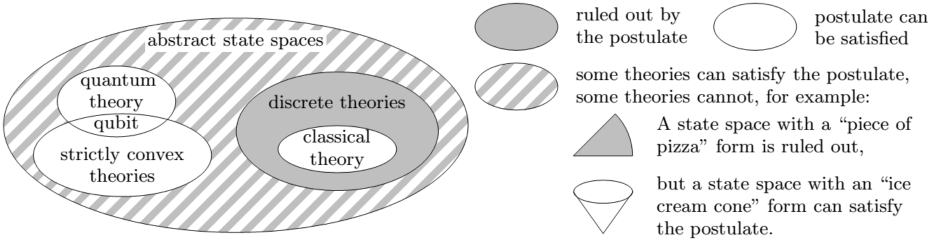
Mechanika kwantowa i mechanika klasyczna spełniają Postulat.

Postulat

Dla każdego czystego efektu f istnieje taka f-transformacja $T_f : A \to A$, że $T(\omega) = \omega$ dla każdego $\omega \in \Omega_A$, dla którego $f(\omega) = 1$.

Twierdzenie

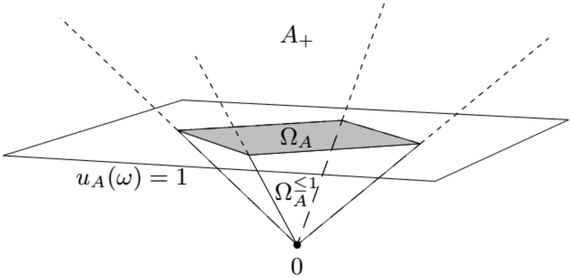
Jeśli przestrzeń stanów Ω_A spełnia Postulat, to jest sympleksem lub zawiera nieskończenie wiele stanów czystych.



Przestrzeń stanów to trójka (A, A_+, u_A), gdzie:

- A - rzeczywista przestrzeń wektorowa (skończonego wymiaru)
- A_+ - stożek w A (generujący i domknięty)
- u_A - liniowy funkcjonał na A, (ściśle) dodatni na na A_+

$$\Omega_A := \{\omega \in A_+ \mid u_A(\omega) = 1\}$$
$$\Omega_A^{\leq 1} := \{\omega \in A_+ \mid u_A(\omega) \leq 1\}$$



Przestrzeń stanów: (A, A_+, u_A)

$$E_A := \{f \in A^* \mid 0 \leq f(\omega) \leq 1 \ \ \forall \omega \in \Omega_A\}$$

$$F_f := \{\omega \in \Omega_A \mid f(\omega) = 1\}$$
$$\bar{F}_f := \{\omega \in \Omega_A \mid f(\omega) = 0\}$$

Przestrzeń stanów: (A, A_+, u_A)

$$E_A := \{f \in A^* \mid 0 \leq f(\omega) \leq 1 \ \ \forall\omega \in \Omega_A\}$$

$$F_f := \{\omega \in \Omega_A \mid f(\omega) = 1\}$$
$$\bar{F}_f := \{\omega \in \Omega_A \mid f(\omega) = 0\}$$

Niech C będzie zbiorem wypukłym. Niepusty i wypukły $F \subset C$ nazywamy **ścianą** C, gdy

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in F \implies x, y \in F$$

dla $x, y \in C$ oraz $0 < \lambda < 1$.

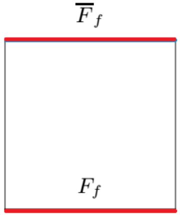
Twierdzenie. Jeśli f jest czystym efektem, to F_f i $\bar{F}_f$ są ścianami Ω_A (odpowiednio: ścianą **pewną** i ścianą **niemożliwą**)

Lemat

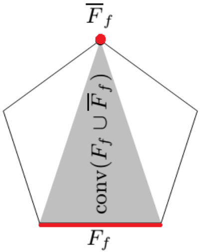
Niech (A, A_+, u_A) będzie przestrzenią stanów, zaś f czystym efektem. Jeśli istnieje f-transformacja $T_f\colon A \to A$ taka, że $T_f(\omega) = \omega$ na F_f, to

(a) $\dim F_f + \dim \bar{F}_f \leq \dim \Omega - 1$

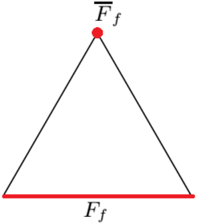
(b) $\#\bar{F}_f \leq 1 \implies \mathrm{aff}(F_f \cup \bar{F}_f) \cap \Omega_A = \mathrm{conv}(F_f \cup \bar{F}_f)$



$\dim F_f = \dim \overline{F}_f = 1$
$\dim \Omega_A = 2$



$\mathrm{aff}(F_f \cup \overline{F}_f) \cap \Omega_A = \Omega_A$
$\mathrm{conv}(F_f \cup \overline{F}_f) \neq \Omega_A$

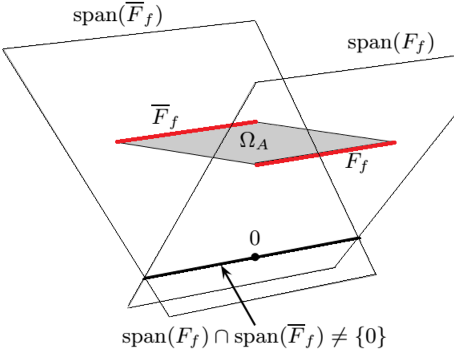


Ustalmy (A, A_+, u_A) i czysty efekt f

$T_f \colon A \to A$ to transformacja taka, że
$u_A \circ T = f$ oraz $T_f(\omega) = \omega \;\; \forall \omega \in F_f$

$$T|_{span(F_f)} = Id|_{span(F_f)}$$

$$T|_{span(\bar{F}_f)} = 0|_{span(\bar{F}_f)}$$



Ustalmy (A, A_+, u_A) i czysty efekt f

$T_f \colon A \to A$ to transformacja taka, że $u_A \circ T = f$ oraz $T_f(\omega) = \omega \;\; \forall \omega \in F_f$

$$T|_{span(F_f)} = Id|_{span(F_f)}$$

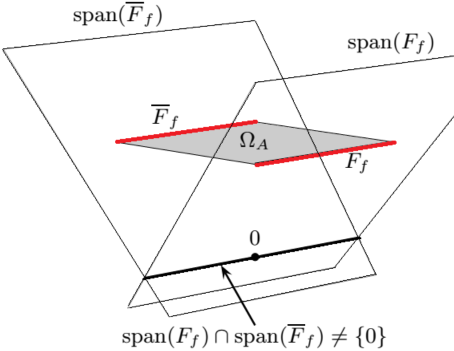
$$T|_{span(\bar{F}_f)} = 0|_{span(\bar{F}_f)}$$

$$\Downarrow$$

$$span(F_f) \cap span(\bar{F}_f) = \{0\}$$

$$\Downarrow$$

$$\dim(span(F_f)) + \dim(span(\bar{F}_f)) \leq \dim A$$



Ustalmy (A, A_+, u_A) i czysty efekt f

$T_f\colon A \to A$ to transformacja taka, że
$u_A \circ T = f$ oraz $T_f(\omega) = \omega \;\; \forall \omega \in F_f$

$$T|_{span(F_f)} = Id|_{span(F_f)}$$

$$T|_{span(\bar{F}_f)} = 0|_{span(\bar{F}_f)}$$

$$\Downarrow$$

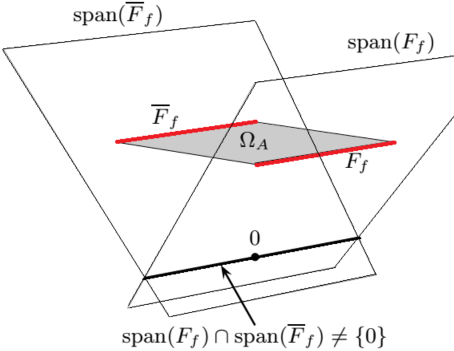
$$span(F_f) \cap span(\bar{F}_f) = \{0\}$$

$$\Downarrow$$

$$\dim(span(F_f)) + \dim(span(\bar{F}_f)) \leq \dim A$$

$$\dim(F_f) + 1 + \dim(\bar{F}_f) + 1 \leq \dim \Omega_A + 1$$

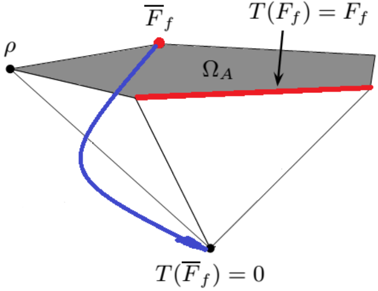
(a) $\dim(F_f) + \dim(\bar{F}_f) \leq \dim \Omega_A - 1$



(b) $\#\bar{F}_f \leq 1 \Longrightarrow \mathrm{aff}(F_f \cup \bar{F}_f) \cap \Omega_A = \mathrm{conv}(F_f \cup \bar{F}_f)$

$$T|_{span(F_f)} = Id|_{span(F_f)}$$

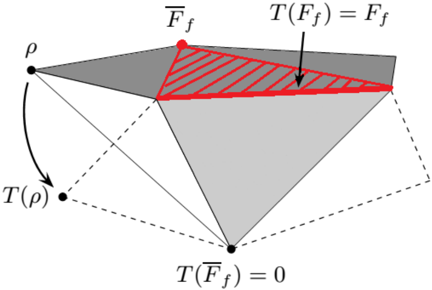
$$T|_{span(\bar{F}_f)} = 0|_{span(\bar{F}_f)}$$



(b) $\#\bar{F}_f \leq 1 \Longrightarrow \mathrm{aff}(F_f \cup \bar{F}_f) \cap \Omega_A = \mathrm{conv}(F_f \cup \bar{F}_f)$

$$T|_{span(F_f)} = Id|_{span(F_f)}$$

$$T|_{span(\bar{F}_f)} = 0|_{span(\bar{F}_f)}$$



$$\text{(b)} \quad \#\bar{F}_f \leq 1 \Longrightarrow \mathrm{aff}(F_f \cup \bar{F}_f) \cap \Omega_A = \mathrm{conv}(F_f \cup \bar{F}_f)$$

$$T|_{span(F_f)} = Id|_{span(F_f)}$$

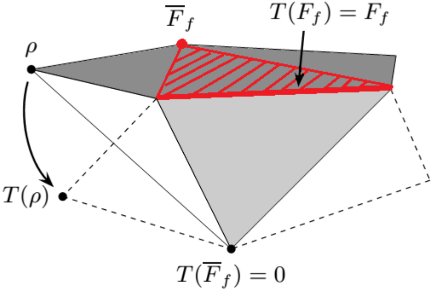
$$T|_{span(\bar{F}_f)} = 0|_{span(\bar{F}_f)}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{aff}(F_f \cup \bar{F}_f) \cap \Omega_A \supset \mathrm{conv}(F_f \cup \bar{F}_f)$$

$$T(\mathrm{aff}(F_f \cup \bar{F}_f) \cap \Omega_A) \subset T(\mathrm{conv}(F_f \cup \bar{F}_f))$$

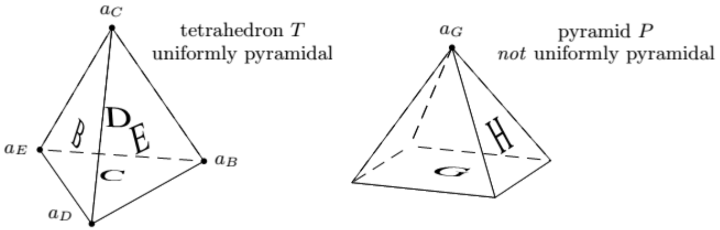
$$T|_{\mathrm{aff}(F_f \cup \bar{F}_f)} \text{ iniekcja}$$



Zbiór $P \subset A$ nazywamy **wielościanem**, jeśli $P = \mathrm{conv}(\{a_1, \ldots, a_k\})$. Wielościan P jest **sympleksem**, jeśli $\{a_1, \ldots, a_k\}$ są afinicznie niezależne.

Ścianę F wielościanu P nazywamy **murem**, jeśli $\dim F = \dim P - 1$.

Wielościan P jest **jednorodnie piramidalny**, jeśli dla każdego muru $F \subset P$ istnieje taki punkt $a_F \in P$, że $P = \mathrm{conv}(F \cup \{a_F\})$.

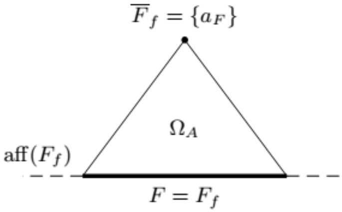


Twierdzenie. Każdy wielościan jednorodnie piramidalny jest sympleksem.

Twierdzenie

Niech (A, A_+, u_A) będzie teorią dyskretną (= Ω_A jest wielościanem).
Jeśli spełniony jest Postulat:
Dla każdego czystego efektu f, ***dla którego*** *F_f* ***jest murem*** *Ω_A, istnieje taka f-transformacja $T_f \colon A \to A$, że $T_f(\omega) = \omega$ na F_f*
to (A, A_+, u_A) jest teorią klasyczną (= Ω_A jest sympleksem).

Jeśli F - mur Ω_A, to istnieje (jedyny) czysty efekt f, dla którego $F_f = F$.

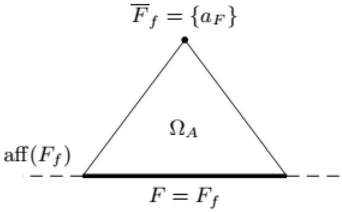


Twierdzenie

Niech (A, A_+, u_A) będzie teorią dyskretną (= Ω_A jest wielościanem).
Jeśli spełniony jest Postulat:
Dla każdego czystego efektu f, ***dla którego F_f jest murem*** *Ω_A, istnieje taka f-transformacja $T_f\colon A \to A$, że $T_f(\omega) = \omega$ na F_f*
to (A, A_+, u_A) jest teorią klasyczną (= Ω_A jest sympleksem).

Jeśli F - mur Ω_A, to istnieje (jedyny) czysty efekt f, dla którego $F_f = F$.

Wówczas mamy $\bar{F}_f = \{a_F\}$, a także $\mathrm{conv}(F \cup \{a_F\}) = \mathrm{aff}(F_f \cup \{a_F\}) \cap \Omega_A = \Omega_A$.



(a) $\dim F_f + \dim \bar{F}_f \leq \dim \Omega - 1$

(b) $\# \bar{F}_f \leq 1 \Longrightarrow \mathrm{conv}(F_f \cup \bar{F}_f) = \mathrm{aff}(F_f \cup \bar{F}_f) \cap \Omega_A$