Strategie kwantowe w teorii gier

Adam Wyrzykowski

Uniwersytet Jagielloński

adam.wyrzykowski@uj.edu.pl

18 stycznia 2015

Plan prezentacji

1. Gra w odwracanie monety (PQ penny flip)
2. Podstawy klasycznej teorii gier
   - Wojna płci
   - Definicje i pojęcia
   - Równowagi Nasha w Wojnie płci
3. Strategie kwantowe w Wojnie płci
   - Kwantowanie Wojny płci
   - Kwantowa Wojna płci pod nieobecność splątania
   - Wpływ splątania na kwantową Wojnę płci
4. Kwantowy Paradoks więźnia

Gra w odwracanie monety (PQ penny flip)

Zasady gry

Gracze Q i P nie znają bieżącej orientacji monety ani ruchów przeciwnika. Początkowo moneta jest ustawiona reszką do góry. Ruch każdego z graczy polega na odwróceniu monety lub pozostawieniu jej stanu bez zmian. Kolejność ruchów jest następująca:

- pierwszy ruch gracza Q,
- ruch gracza P,
- kończący rozgrywkę ruch gracza Q.

Jeżeli końcowy stan monety to reszka, wygrywa Q, jeżeli orzeł – wygrywa P.

	NN	**NF**	**FN**	**FF**
N	-1	1	1	-1
F	1	-1	-1	1

Tabela : Tabela wypłat gracza P

Kwantowanie gry w odwracanie monety

$$|\psi>= a|R> +b|O>$$

$$aa^* + bb^* = 1$$

$$|R>\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |O>\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Strategie klasyczne

Liniowa kombinacja odwrócenia monety z prawdopodobieństwem p i pozostawienia jej stanu bez zmian z pr-stwem $(1-p)$:

$$U_P = p \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (1-p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

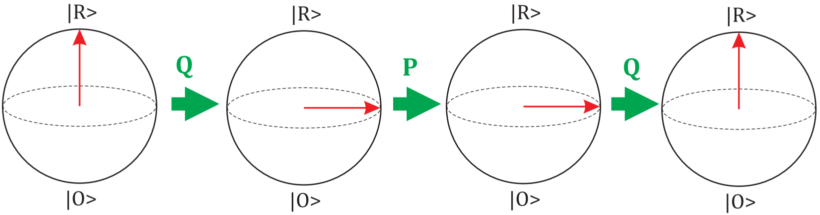
Strategie kwantowe

Operacje unitarne:

$$U_Q = \begin{pmatrix} c & d \\ d^* & -c^* \end{pmatrix} \quad ,$$

gdzie $|c|^2 + |d|^2 = 1$.

Przewaga strategii kwantowych



$$|\psi_1>= U_Q|R>= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R> + |O>) \qquad (1)$$

$$|\psi_2>= U_P|\psi_1>= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + (1-p)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$|\psi_3>= U_Q|\psi_2>= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |R> \qquad (3)$$

Wojna płci

		Bob	
		O	T
Alice	O	(α, β)	(γ, γ)
	T	(γ, γ)	(β, α)

Rysunek : Macierz wypłat (źródło obrazka [2]).

$$\alpha > \beta > \gamma$$

Definicje i pojęcia (cz. 1)

Statyczna gra o pełnej informacji

Każdy z graczy **zna dostępne strategie** innych i wynikające z nich wypłaty, ale poznają wybrane przez nich strategie dopiero wraz **z końcem gry**. Należy określić:

- liczbę graczy $i = 1, 2, ..., N$;
- zbiory strategii dla każdego gracza $\{s_i^\alpha\}$;
- funkcje wypłaty $\$_i = \$_i(s_1, s_2, ..., s_N)$, które przypisują $i-$temu graczowi liczbę rzeczywistą (wypłatę) w zależności od strategii wybranych przez wszystkich graczy.

W przypadku Wojny płci $i = 2$, zbiór strategii Alicji (Boba) to $\{O, T\}$, zaś funkcje wypłaty $\$_1(s_1, s_2)$ oraz $\$_2(s_1, s_2)$ są określone przez macierz wypłaty, np. $\$_1(O, O) = \$_2(T, T) = \alpha$.

Definicje i pojęcia (cz. 2)

Mocna dominacja strategii

Strategię $i-$tego gracza s_i nazywamy *ściśle zdominowaną* przez strategię $\tilde{s}_i$, jeżeli:

$$\$_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_N) < \$_i(s_1, \ldots, \tilde{s}_i, \ldots, s_N)$$

dla każdego wyboru $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_N)$.

Równowaga Nasha

Zespół strategii $(s_1^\star, s_2^\star, \ldots, s_N^\star)$ stanowi *równowagę Nasha*, jeżeli dla każdego gracza i zachodzi:

$$\$_i(s_1^\star, \ldots, s_{i-1}^\star, s_i^\star, s_{i+1}^\star, \ldots, s_N^\star) \geqslant \$_i(s_1^\star, \ldots, s_{i-1}^\star, s_i, s_{i+1}^\star, \ldots, s_N^\star)$$

dla każdej strategii s_i dostępnej dla $i-$tego gracza.

Definicje i pojęcia (cz. 3)

Strategie mieszane

Strategia mieszana dla $i-$tego gracza to rozkład prawdopodobieństwa, który przypisuje pr-stwo p_i^α każdej czystej strategii s_i^α ze zbioru strategii $i-$tego gracza. Wówczas $\$_i(s_1, s_2, ..., s_N)$ jest zastępowane przez funkcję *oczekiwanej wypłaty*:

$$\bar{\$}_i(\{p_1\}, \{p_2\}, ..., \{p_N\}) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_N^{\alpha_N} \$_i(s_1^{\alpha_1}, s_2^{\alpha_2}, ..., s_N^{\alpha_N})$$

Równowagi Nasha w Wojnie płci

$p-$prawdopodobieństwo, że Alicja wybierze operę, $p \in [0,1]$
$q-$prawdopodobieństwo, że Bob wybierze operę, $q \in [0,1]$

$$\bar{\$}_A(p,q) = p[q(\alpha - 2\gamma + \beta) + \gamma - \beta] + \beta + q(\gamma - \beta) \quad (4)$$

$$\bar{\$}_B(p,q) = q[p(\alpha - 2\gamma + \beta) + \gamma - \alpha] + \alpha + p(\gamma - \alpha) \quad (5)$$

$$\begin{cases} \bar{\$}_A(p^\star,q^\star) - \bar{\$}_A(p,q^\star) = (p^\star - p)[q^\star(\alpha+\beta-2\gamma) - \beta + \gamma] \geqslant 0 \\ \bar{\$}_B(p^\star,q^\star) - \bar{\$}_B(p^\star,q) = (q^\star - q)[p^\star(\alpha+\beta-2\gamma) - \alpha + \gamma] \geqslant 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$p^\star_{(1)} = 1, \;\; q^\star_{(1)} = 1$$

$$\bar{\$}_A(1,1) = \alpha$$

$$\bar{\$}_B(1,1) = \beta$$

$$p^\star_{(2)} = 0, \;\; q^\star_{(2)} = 0$$

$$\bar{\$}_A(0,0) = \beta$$

$$\bar{\$}_B(0,0) = \alpha$$

$$p^\star_{(3)} = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha+\beta-2\gamma}$$

$$q^\star_{(3)} = \frac{\beta-\gamma}{\alpha+\beta-2\gamma}$$

$$\bar{\$}_A = \bar{\$}_B = \frac{\alpha\beta-\gamma^2}{\alpha+\beta-2\gamma}$$

Kwantowanie gry (cz. 1)

Reguła 1

Przestrzeń strategii Alicji S_A (Boba S_B) jest dwuwymiarową przestrzenią Hilberta:

$$|\psi >= a|O > +b|T >, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \ .$$

Na początku gry ustala się dowolny początkowy stan $|\psi_{in} >$ z przestrzeni $S = S_A \otimes S_B = (|OO >, |OT >, |TO >, |TT >)$.

Reguła 2

Ruch Alicji (Boba) polega na wykonaniu operacji unitarnej $A \in S_A$ $(B \in S_B)$ na jej (jego) kubicie stanu $|\psi_{in} >$. Końcowy stan wynosi $|\psi_{fin} >= A \otimes B|\psi_{in} >$.

Kwantowanie gry (cz. 2)

Reguła 3

Wartości $\bar{\$}_A$ i $\bar{\$}_B$ znajduje się obliczając kwadraty modułów rzutów stanu $|\psi_{fin}>$ na wektory bazowe $|OO>$, $|OT>$, $|TO>$, $|TT>$, a następnie dodając uzyskane liczby przemnożone przez odpowiednie współczynniki z macierzy wypłat.

Reguła 4

Ostatecznie Alicja musi zagrać klasyczną strategię, która wynika z pomiaru na końcowym stanie kwantowym, tzn. z rzutowania $|\psi_{fin}>$ na wektory bazowe S_A. Podobnie Bob.

Równowagi Nasha – faktoryzowalne stany $|\psi_{in}>$ (cz. 1)

- Skoro $|\psi_{in}>$ jest faktoryzowalny, można przyjąć bez straty ogólności $|\psi_{in}>=|OO>$.
- W bazie $\{|O>,|T>\}$ operacje Alicji i Boba mają postać:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d^* & c^* \end{pmatrix},$$

gdzie $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1$.

- Stan końcowy wynosi zatem:

$$|\psi_{fin}>= A \otimes B|\psi_{in}>=$$
$$= ac|OO> - ad^*|OT> - b^*c|TO> + b^*d^*|TT>$$

Równowagi Nasha – faktoryzowalne stany $|\psi_{in}>$ (cz. 2)

Zgodnie z *Regułą 3* znajdujemy więc:

$$\bar{\$}_A = |a|^2[(\alpha+\beta-2\gamma)|c|^2 - \beta + \gamma] + \beta + (\gamma-\beta)|c|^2 \quad (7)$$

$$\bar{\$}_B = |c|^2[(\alpha+\beta-2\gamma)|a|^2 - \alpha + \gamma] + \alpha + (\gamma-\alpha)|a|^2 \quad (8)$$

Wynik ten jest identyczny jak uzyskany w klasycznej teorii gier, jeżeli $p = |a|^2$ oraz $q = |c|^2$. Równowagi Nasha:

- $(|a|^2 = 0, |c|^2 = 0)$ $\quad |\psi_{fin}>=|TT>$ $\quad \bar{\$}_A = \beta \quad \bar{\$}_B = \alpha$
- $(|a|^2 = 1, |c|^2 = 1)$ $\quad |\psi_{fin}>=|OO>$ $\quad \bar{\$}_A = \alpha \quad \bar{\$}_B = \beta$
- $\left(|a|^2 = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha+\beta-2\gamma},\ |c|^2 = \frac{\beta-\gamma}{\alpha+\beta-2\gamma}\right)$ $\quad \bar{\$}_A = \bar{\$}_B = \frac{\alpha\beta-\gamma^2}{\alpha+\beta-2\gamma}$

  $|\psi_{fin}>= \frac{(\sqrt{\alpha-\gamma}|O>-\sqrt{\beta-\gamma}|T>)\otimes(\sqrt{\beta-\gamma}|O>-\sqrt{\alpha-\gamma}|T>)}{\alpha+\beta-2\gamma}$

Nowe równowagi Nasha – stany splątane

$$|\psi_{in}>= a|OO> + b|TT>, \ |a|^2 + |b|^2 = 1$$

$$\rho_{fin}^{A(B)} = pI\rho_{in}^{A(B)}I^{\dagger} + (1-p)C\rho_{in}^{A(B)}C^{\dagger} \qquad (C|O>= T, \ C|T>= O)$$

1. $p^{\star}_{(1)} = q^{\star}_{(1)} = 1$

$$\bar{\$}_A(1,1) = \alpha|a|^2 + \beta|b|^2 \quad \bar{\$}_B(1,1) = \beta|a|^2 + \alpha|b|^2$$

2. $p^{\star}_{(2)} = q^{\star}_{(2)} = 0$

$$\bar{\$}_A(0,0) = \beta|a|^2 + \alpha|b|^2 \quad \bar{\$}_B(0,0) = \alpha|a|^2 + \beta|b|^2$$

3. $p^{\star}_{(3)} = \frac{(\alpha-\gamma)|a|^2+(\beta-\gamma)|b|^2}{\alpha+\beta-2\gamma} \quad q^{\star}_{(3)} = \frac{(\alpha-\gamma)|b|^2+(\beta-\gamma)|a|^2}{\alpha+\beta-2\gamma}$

$$\bar{\$}_A(p^{\star}_{(3)}, q^{\star}_{(3)}) = \bar{\$}_B(p^{\star}_{(3)}, q^{\star}_{(3)}) = \frac{\alpha\beta + (\alpha-\beta)^2|a|^2|b|^2 - \gamma^2}{\alpha+\beta-2\gamma}$$

Ostateczny kompromis

1. Brak samotnych wieczorów

$$\bar{\$}_A(1,1) + \bar{\$}_B(1,1) = \bar{\$}_A(0,0) + \bar{\$}_B(0,0) = \alpha + \beta$$

2. Równowagi Nasha 1 i 2 można "połączyć"

$$\begin{cases} \bar{\$}_A(1,1) - \bar{\$}_A(0,0) = (\alpha - \beta)(|a|^2 - |b|^2) \\ \bar{\$}_B(1,1) - \bar{\$}_B(0,0) = (\alpha - \beta)(|b|^2 - |a|^2) \end{cases} \overset{kompromis}{\Longrightarrow} |a| = |b| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. Najlepsza strategia

$$|\psi_{in} >= \frac{1}{\sqrt{2}}(|OO > + |TT >) = |\psi_{fin} >$$

$$(p^\star = 0, q^\star = 0) \text{ albo } (p^\star = 1, q^\star = 1) \Rightarrow \bar{\$}_A = \bar{\$}_B = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Paradoks więźnia – klasyczne i kwantowe sformułowanie

	Bob: C	Bob: D
Alice: C	(3,3)	(0,5)
Alice: D	(5,0)	(1,1)

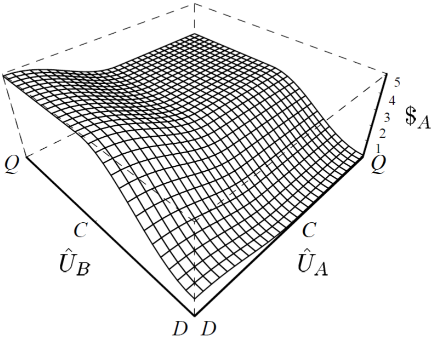
$$|\psi_f >= J^\dagger (U_A \otimes U_B) J |CC > \tag{9}$$

$$U(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} e^{i\phi} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & e^{-i\phi}\cos\theta/2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$U(0,0) = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U(\pi, 0) = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad U\left(0, \tfrac{\pi}{2}\right) = Q = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

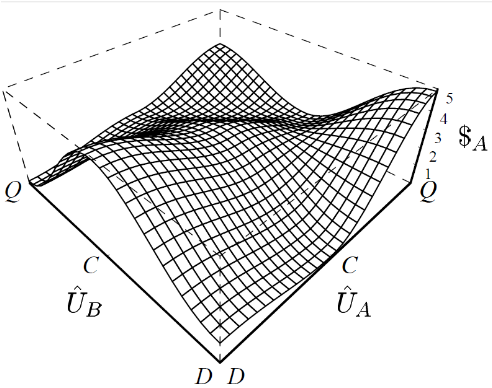
$$J = \exp\left[\frac{i\gamma D \otimes D}{2}\right] \qquad \gamma \in [0, \pi/2] \text{ – wsp. splątania} \tag{11}$$

Paradoks więźnia - gra separowalna ($\gamma = 0$)



Rysunek : Wypłata Alicji w grze separowalnej. Na wykresie wybrano specjalną parametryzację, w której U_A i U_B zależą tylko od jednego parametru $t \in [-1, 1]$: przyjmujemy $U_A = U(t\pi, 0)$ dla $t \in [0, 1]$ oraz $U_A = U(0, -t\pi/2)$ dla $t \in [-1, 0)$ (podobnie dla Boba). Zdrada D odpowiada $t = 1$, współpraca C to $t = 0$, a strategia Q jest reprezentowana przez $t = -1$ (źródło obrazka [3]).

Paradoks więźnia - maksymalne splątanie ($\gamma = \pi/2$)



Rysunek : Wypłata Alicji w grze o maksymalnym splątaniu (źródło obrazka [3]).

Podsumowanie

- Poszerzenie przestrzeni dostępnych strategii o strategie kwantowe może prowadzić do powstawania nowych równowag Nasha i znikania dotychczasowych.
- Zastosowanie strategii kwantowych może prowadzić do rozwiązań korzystniejszych dla obu graczy, klasycznie niedostępnych.
- Szczególną rolę w grach kwantowych spełnia splątanie stanu, na krórym operacje mogą wykonywać gracze.
- Gracz dysponujący strategią kwantową grający przeciwko graczowi korzystającemu wyłącznie ze strategii klasycznych na ogół będzie posiadać przewagę.

Literatura

[1] David A. Meyer (1999)
Quantum strategies
Physical Review Letters 82 (5), 1052–1055.

[2] L. Marinatto, T. Weber (2000)
A quantum approach to static games of complete information
Physics Letters A 272, 291–303.

[3] J. Eisert, M. Wilkens, M. Lewenstein (1999)
Quantum games and quantum strategies
Physical Review Letters 83 (15), 3077–3080.

[4]
`http://mindyourdecisions.com/blog/2012/09/11/quantum-coin-flipping-game-theory/`