Jak wygrywać w brydża znając mechanikę kwantową?

Tomasz Kisielewski

15 grudnia 2014

Podstawowe zasady brydża

Brydż jest grą karcianą dla czterech osób grających w drużynach po dwie osoby. Gra składa się z dwóch części:

Podstawowe zasady brydża

Brydż jest grą karcianą dla czterech osób grających w drużynach po dwie osoby. Gra składa się z dwóch części:

1. Licytacji – gracze w każdej drużynie starają się ustalić jak wiele lew są w stanie zebrać w następnej części.

Podstawowe zasady brydża

Brydż jest grą karcianą dla czterech osób grających w drużynach po dwie osoby. Gra składa się z dwóch części:

1. Licytacji – gracze w każdej drużynie starają się ustalić jak wiele lew są w stanie zebrać w następnej części.
2. Rozgrywki – drużyna, która wygrała licytację stara się zebrać wylicytowaną liczbę lew, drużyna przeciwna stara się temu zapobiec.

Podstawowe zasady brydża

Brydż jest grą karcianą dla czterech osób grających w drużynach po dwie osoby. Gra składa się z dwóch części:

1. Licytacji – gracze w każdej drużynie starają się ustalić jak wiele lew są w stanie zebrać w następnej części.
2. Rozgrywki – drużyna, która wygrała licytację stara się zebrać wylicytowaną liczbę lew, drużyna przeciwna stara się temu zapobiec.

W brydżu, szczególnie porównawczym, niezmiernie istotne jest by wylicytować możliwie najwyższy kontrakt, który jest się w stanie ugrać.

Szczegóły licytacji

Licytacja polega na po kolei deklarowaniu, że się zbierze pewną liczbę lew przy konkretnym kolorze atutowym.

Szczegóły licytacji

Licytacja polega na po kolei deklarowaniu, że się zbierze pewną liczbę lew przy konkretnym kolorze atutowym. Za każdym razem trzeba zadeklarować więcej niż ostatnia odzywka.

Szczegóły licytacji

Licytacja polega na po kolei deklarowaniu, że się zbierze pewną liczbę lew przy konkretnym kolorze atutowym. Za każdym razem trzeba zadeklarować więcej niż ostatnia odzywka. Jednocześnie w licytacji kluczowe jest przekazanie partnerowi jak najwięcej istotnych informacji o swojej ręce.

Szczegóły licytacji

Licytacja polega na po kolei deklarowaniu, że się zbierze pewną liczbę lew przy konkretnym kolorze atutowym. Za każdym razem trzeba zadeklarować więcej niż ostatnia odzywka. Jednocześnie w licytacji kluczowe jest przekazanie partnerowi jak najwięcej istotnych informacji o swojej ręce.
To *naturalnie* powoduje chęć przekazywania jak największej ilości informacji przy minimalnej liczbie odzywek – zbyt wiele odzywek wymusiłoby granie kontraktu, który jest mało prawdopodobny do ugrania.

Szczegóły licytacji

Licytacja polega na po kolei deklarowaniu, że się zbierze pewną liczbę lew przy konkretnym kolorze atutowym. Za każdym razem trzeba zadeklarować więcej niż ostatnia odzywka. Jednocześnie w licytacji kluczowe jest przekazanie partnerowi jak najwięcej istotnych informacji o swojej ręce.
To *naturalnie* powoduje chęć przekazywania jak największej ilości informacji przy minimalnej liczbie odzywek – zbyt wiele odzywek wymusiłoby granie kontraktu, który jest mało prawdopodobny do ugrania. Powstało wiele konwencji licytacyjnych, nie jest znana optymalna ani nie wiadomo czy taka istnieje.

Roman Key Card Blackwood

Gdy gracze ustalili już kolor atutowy jeden, Bartek, może chcieć dowiedzieć się jakie asy i figury atutowe posiada drugi gracz, Alicja – może się tego dowiedzieć korzystając z konwencji typu Blackwood.

Roman Key Card Blackwood

Gdy gracze ustalili już kolor atutowy jeden, Bartek, może chcieć dowiedzieć się jakie asy i figury atutowe posiada drugi gracz, Alicja – może się tego dowiedzieć korzystając z konwencji typu Blackwood.
Bartek zadaje więc pytanie licytując 4NT.

Roman Key Card Blackwood

Gdy gracze ustalili już kolor atutowy jeden, Bartek, może chcieć dowiedzieć się jakie asy i figury atutowe posiada drugi gracz, Alicja – może się tego dowiedzieć korzystając z konwencji typu Blackwood.

Bartek zadaje więc pytanie licytując 4NT. Alicja odpowiada:

- 5♣ gdy ma 0 lub 3 kluczowe karty,
- 5♢ gdy ma 1 lub 4 kluczowe karty,
- 5♡ gdy ma 2 lub 5 kluczowych kart i nie ma damy atutowej,
- 5♠ gdy ma 2 lub 5 kluczowych kart i ma damę atutową.

Kluczowa karta to dowolny as bądź król atutowy.

Roman Key Card Blackwood

Gdy gracze ustalili już kolor atutowy jeden, Bartek, może chcieć dowiedzieć się jakie asy i figury atutowe posiada drugi gracz, Alicja – może się tego dowiedzieć korzystając z konwencji typu Blackwood.
Bartek zadaje więc pytanie licytując 4NT. Alicja odpowiada:

- 5♣ gdy ma 0 lub 3 kluczowe karty,
- 5♢ gdy ma 1 lub 4 kluczowe karty,
- 5♡ gdy ma 2 lub 5 kluczowych kart i nie ma damy atutowej,
- 5♠ gdy ma 2 lub 5 kluczowych kart i ma damę atutową.

Kluczowa karta to dowolny as bądź król atutowy.
Dwie pierwsze odpowiedzi nie przekazują *żadnej* informacji o damie atutowej!

Formalny opis problemu

Bartek chciałby wiedzieć albo jakie Alicja ma kluczowe karty ($b = 0$), albo czy ma damę atutową ($b = 1$).

Formalny opis problemu

Bartek chciałby wiedzieć albo jakie Alicja ma kluczowe karty ($b = 0$), albo czy ma damę atutową ($b = 1$). Alicja ma dwie informacje, ilość kart kluczowych a_0 i posiadanie damy atutowej a_1. Jeśli posiada damę to $a_1 = 0$, jeśli nie to $a_1 = 1$. Jeśli ma 0 lub 3 karty kluczowe, to $a_0 = 0$, jeśli ma 1 lub 4, to $a_0 = 1$.

Formalny opis problemu

Bartek chciałby wiedzieć albo jakie Alicja ma kluczowe karty ($b = 0$), albo czy ma damę atutową ($b = 1$). Alicja ma dwie informacje, ilość kart kluczowych a_0 i posiadanie damy atutowej a_1. Jeśli posiada damę to $a_1 = 0$, jeśli nie to $a_1 = 1$. Jeśli ma 0 lub 3 karty kluczowe, to $a_0 = 0$, jeśli ma 1 lub 4, to $a_0 = 1$. Jeśli ma 2 lub 5, stosujemy standardowego RKCB i od teraz będziemy ten przypadek pomijać.

Formalny opis problemu

Bartek chciałby wiedzieć albo jakie Alicja ma kluczowe karty ($b = 0$), albo czy ma damę atutową ($b = 1$). Alicja ma dwie informacje, ilość kart kluczowych a_0 i posiadanie damy atutowej a_1. Jeśli posiada damę to $a_1 = 0$, jeśli nie to $a_1 = 1$. Jeśli ma 0 lub 3 karty kluczowe, to $a_0 = 0$, jeśli ma 1 lub 4, to $a_0 = 1$. Jeśli ma 2 lub 5, stosujemy standardowego RKCB i od teraz będziemy ten przypadek pomijać.
Sprowadziliśmy więc problem do następującego:

Problem

Alicja zna dwa bity a_0 i a_1. Bartek chce poznać jeden z nich a_b. On nie może przesłać żadnej informacji, podczas gdy Alicja może przesłać jeden bit m w formie $m = 0 \leftrightarrow 5\clubsuit$ i $m = 1 \leftrightarrow 5\diamondsuit$.

Prawdopodobieństwo sukcesu w przypadku klasycznym

Średnie prawdopodobieństwo sukcesu w ogólności

$$I = \sum_{i,j,k} p\left(a_0 = i, a_1 = j, b = k\right)$$
$$P\left(R(b, m(a_0, a_1)) = a_b | a_0 = i, a_1 = j, b = k\right)$$

Prawdopodobieństwo sukcesu w przypadku klasycznym

Średnie prawdopodobieństwo sukcesu w ogólności

$$I = \sum_{i,j,k} p\left(a_0 = i, a_1 = j, b = k\right) P\left(R(b, m(a_0, a_1)) = a_b \middle| a_0 = i, a_1 = j, b = k\right)$$

Maksymalne średnie prawdopodobieństwo sukcesu w przypadku klasycznym dla a_0 i a_1 niezależnych

$$I_C = \max\Big\{p\left(b = 0\right) + p\left(b = 1\right) \max_i \left\{p\left(a_1 = i \middle| b = 1\right)\right\}, p\left(b = 1\right) + p\left(b = 0\right) \max_i \left\{p\left(a_0 = i \middle| b = 0\right)\right\}\Big\}$$

Strategia kwantowa

Alicja i Bartek przeprowadzają pomiar na stanie splątanym.

Strategia kwantowa

Alicja i Bartek przeprowadzają pomiar na stanie splątanym. Każde z nich może zmierzyć jedną z dwóch obserwabli, których wyniki są binarne.

Strategia kwantowa

Alicja i Bartek przeprowadzają pomiar na stanie splątanym. Każde z nich może zmierzyć jedną z dwóch obserwabli, których wyniki są binarne.

Alicja wybierze obserwablę na podstawie $a = a_0 \oplus a_1$, a Bartek na podstawie b.

Strategia kwantowa

Alicja i Bartek przeprowadzają pomiar na stanie splątanym. Każde z nich może zmierzyć jedną z dwóch obserwabli, których wyniki są binarne.
Alicja wybierze obserwablę na podstawie $a = a_0 \oplus a_1$, a Bartek na podstawie b. Alicja wyśle jako informację bit $m = A \oplus a_0$, a Bartek zgadnie wartość bitu który chce poznać jako $R = B \oplus m$, gdzie A i B to wyniki odpowiednich pomiarów.

Strategia kwantowa

Alicja i Bartek przeprowadzają pomiar na stanie splątanym. Każde z nich może zmierzyć jedną z dwóch obserwabli, których wyniki są binarne.
Alicja wybierze obserwablę na podstawie $a = a_0 \oplus a_1$, a Bartek na podstawie b. Alicja wyśle jako informację bit $m = A \oplus a_0$, a Bartek zgadnie wartość bitu który chce poznać jako $R = B \oplus m$, gdzie A i B to wyniki odpowiednich pomiarów. Łatwo zauważyć, że $R = a_b$ gdy $A \oplus B = ab$.

Strategia kwantowa

Alicja i Bartek przeprowadzają pomiar na stanie splątanym. Każde z nich może zmierzyć jedną z dwóch obserwabli, których wyniki są binarne.
Alicja wybierze obserwablę na podstawie $a = a_0 \oplus a_1$, a Bartek na podstawie b. Alicja wyśle jako informację bit $m = A \oplus a_0$, a Bartek zgadnie wartość bitu który chce poznać jako $R = B \oplus m$, gdzie A i B to wyniki odpowiednich pomiarów. Łatwo zauważyć, że $R = a_b$ gdy $A \oplus B = ab$. W związku z tym Bartek pozna prawdziwą wartość a_b z prawdopodobieństwem

$$I = \sum_{a,b} p\left(a, b\right) P\left(A \oplus B = ab | a, b\right)$$

Prawdopodobieństwo sukcesu w przypadku kwantowym

Alicja zmierzy obserwablę 0 z prawdopodobieństwem

$$p = p\left(a_0 = 0\right) p\left(a_1 = 0\right) + p\left(a_0 = 1\right) p\left(a_1 = 1\right),$$

podczas gdy Bartek zmierzy swoją obserwablę 0 z prawdopodobieństwem q.

Prawdopodobieństwo sukcesu w przypadku kwantowym

Alicja zmierzy obserwablę 0 z prawdopodobieństwem

$$p = p\left(a_0 = 0\right) p\left(a_1 = 0\right) + p\left(a_0 = 1\right) p\left(a_1 = 1\right),$$

podczas gdy Bartek zmierzy swoją obserwablę 0
z prawdopodobieństwem q.
Prawdopodobieństwo sukcesu można równoważnie zapisać jako

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{a,b} p\left(a, b\right) \left(-1\right)^{ab} E\left(a, b\right),$$

gdzie $E\left(a, b\right) = P\left(A = B | a, b\right) - P\left(A \neq B | a, b\right)$.

Prawdopodobieństwo sukcesu w przypadku kwantowym

Alicja zmierzy obserwablę 0 z prawdopodobieństwem

$$p = p\,(a_0 = 0)\,p\,(a_1 = 0) + p\,(a_0 = 1)\,p\,(a_1 = 1)\,,$$

podczas gdy Bartek zmierzy swoją obserwablę 0
z prawdopodobieństwem q.
Prawdopodobieństwo sukcesu można równoważnie zapisać jako

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{a,b} p\,(a,b)\,(-1)^{ab}\,E\,(a,b)\,,$$

gdzie $E\,(a,b) = P\,(A = B|a,b) - P\,(A \neq B|a,b)$. Suma w tym wyrażeniu występuje w nierówności CHSH, a jej maksymalna wartość w przypadku kwantowym jest znana.

Prawdopodobieństwo sukcesu w przypadku kwantowym

Alicja zmierzy obserwablę 0 z prawdopodobieństwem

$$p = p\left(a_0 = 0\right) p\left(a_1 = 0\right) + p\left(a_0 = 1\right) p\left(a_1 = 1\right),$$

podczas gdy Bartek zmierzy swoją obserwablę 0
z prawdopodobieństwem q.
Prawdopodobieństwo sukcesu można równoważnie zapisać jako

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{a,b} p\left(a, b\right) \left(-1\right)^{ab} E\left(a, b\right),$$

gdzie $E\left(a, b\right) = P\left(A = B | a, b\right) - P\left(A \neq B | a, b\right)$. Suma w tym wyrażeniu występuje w nierówności CHSH, a jej maksymalna wartość w przypadku kwantowym jest znana. W związku z tym maksymalne średnie prawdopodobieństwo sukcesu w przypadku kwantowym wynosi

$$I_Q = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\sqrt{q^2 + (1-q)^2}\sqrt{p^2 + (1-p)^2}\right).$$

Mierzony stan i obserwable

Alicja i Bartek powinni mierzyć maksymalnie splątany stan

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

na przykład w postaci fotonów o przeciwnej polaryzacji.

Mierzony stan i obserwable

Alicja i Bartek powinni mierzyć maksymalnie splątany stan

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

na przykład w postaci fotonów o przeciwnej polaryzacji. Obserwable które powinni mierzyć to polaryzacja fotonu pod kątami zależnymi od prawdopodobieństw p i q.

Mierzony stan i obserwable

Alicja i Bartek powinni mierzyć maksymalnie splątany stan

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

na przykład w postaci fotonów o przeciwnej polaryzacji. Obserwable które powinni mierzyć to polaryzacja fotonu pod kątami zależnymi od prawdopodobieństw p i q. Mogę wypisać dokładne wzory, ale nie wiem czy ktoś zobaczy w nich cokolwiek szczególnie interesującego.

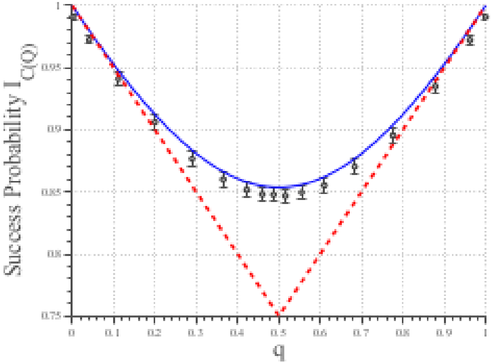
Mierzony stan i obserwable

Alicja i Bartek powinni mierzyć maksymalnie splątany stan

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

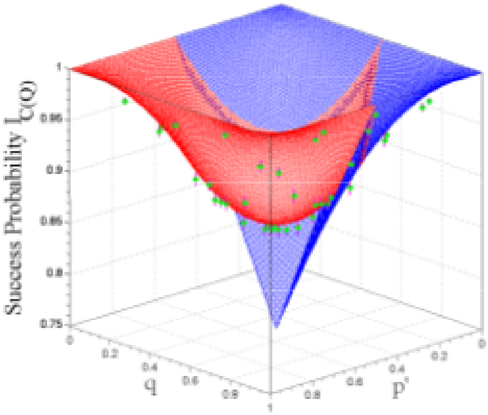
na przykład w postaci fotonów o przeciwnej polaryzacji.
Obserwable które powinni mierzyć to polaryzacja fotonu pod kątami zależnymi od prawdopodobieństw p i q. Mogę wypisać dokładne wzory, ale nie wiem czy ktoś zobaczy w nich cokolwiek szczególnie interesującego.
Warto zauważyć, że reguły brydża nie ograniczają komunikacji między graczami nie przekazującej informacji o kartach. Jako że wykrycie cząstki samo w sobie nie przekazuje żadnej informacji o kartach, każdy z graczy może je ogłaszać póki obu nie uda się wykryć pary, dzięki czemu nie muszą się przejmować wydajnością detektorów.

Wyniki 1



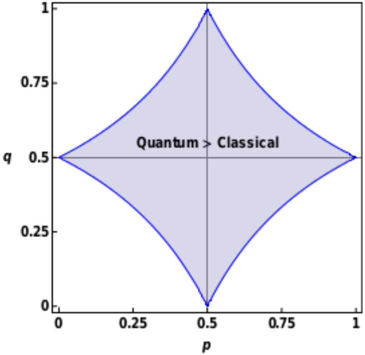
Rysunek: Prawdopodobieństwo sukcesu dla $p = 0.5$

Wyniki 2



Rysunek: Prawdopodobieństwo sukcesu w ogólnej sytuacji

Wyniki 2



Rysunek: Kiedy strategia kwantowa ma przewagę

Literatura I

S. Muhammad, A. Tavakoli, M. Kurant, M. Pawłowski, M. Żukowski, M. Bourennane
Quantum bidding in Bridge
Phys. Rev. X 4, 021047 (2014)
arXiv:1403.4280

T. Lawson, N. Linden, S. Popescu
Biased nonlocal quantum games
arXiv:1011.6245

http://en.wikipedia.org/wiki/Blackwood_convention