Entropia Wehrla względem spinowych stanów koherentnych. Dowód hipotezy Lieba

Anna Szymusiak

Instytut Matematyki UJ

26 listopada 2012

na podstawie:
Elliott H. Lieb, Jan Philip Solovej "Proof of an entropy conjecture for Bloch coherent spin states and its generalizations"

- $G = W_1$ – grupa Heisenberga-Weyla: $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ z działaniem $(s, \alpha)(t, \beta) = (s + t + \frac{\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta}}{2i}, \alpha + \beta)$

  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, operatory pędu i położenia na $\mathcal{H}$: $P = \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $Q = x\cdot$

  $\psi_0(x) = (\pi\hbar)^{-1/4} e^{-x^2/2\hbar}$, $H = \mathbb{R} \times 0$, $G/H \simeq \mathbb{R}^2$

  $G/H \ni (p, q) \mapsto U_{p,q} = e^{i(qP - pQ)/\hbar} \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$

  $$|p, q\rangle = U_{p,q}|\psi_0\rangle \ - \text{ stany koherentne Glaubera}$$

Rozkład jedności

$$(2\pi\hbar)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} |p, q\rangle\langle p, q| \mathrm{d}p\mathrm{d}q = \mathbb{I}$$

- $G = SU(2) = \{A \in M(2, \mathbb{C}) : AA^* = A^*A = \mathbb{I},\ \det A = 1\}$
  $\mathcal{H}_J = \mathbb{C}^{2J+1}$
  Przez $\mathbf{S}_J$ oznaczamy wektor operatorów spinu, czyli reprezentację na $\mathcal{H}_J$ standardowych generatorów $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ grupy $SU(2)$.
  $SU(2)/\mathcal{U}(1) \simeq \mathbb{S}^2$
  Spinowymi stanami koherentnymi nazywamy rodzinę $\{|\omega\rangle_J\}_{\omega \in \mathbb{S}^2} \subset \mathcal{H}_J$ zadaną (z dokładnością do czynnika fazowego) przez wektory własne operatora $\omega \cdot \mathbf{S}_J$ z wartością własną J:

$$\omega \cdot \mathbf{S}_J |\omega\rangle_J = J|\omega\rangle_J$$

Rozkład jedności

$$\frac{2J+1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{S}^2} |\omega\rangle_{J\,J}\langle\omega| \mathrm{d}\omega = \mathbb{I}$$

Entropia kwantowa (von Neumanna) operatora gęstości ρ:

$$S^{qu}(\rho) = -\mathrm{Tr}\rho \ln \rho.$$

$S^{qu}(\rho) = 0$ dla wszystkich ρ – stanów czystych

Można zdefiniować klasyczną entropię gęstości prawdopodobieństwa $\tilde{\rho}(p, q)$ (w klasycznej przestrzeni fazowej):

$$S(\rho) = -(2\pi\hbar)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\rho}(p, q) \ln \tilde{\rho}(p, q) \mathrm{d}p\mathrm{d}q.$$

Problemy:

- S może przyjmować wartości ujemne (a nawet $-\infty$)
- gęstość prawdopodobieństwa może mieć nośnik na zbiorze miary mniejszej niż $2\pi\hbar$ – niezgodność z zasadą nieoznaczoności Heisenberga

Pomysł (Wehrl): $\rho^{cl}(p,q) := \mathrm{Tr}(\rho|p,q\rangle\langle p,q|) = \langle p,q|\rho|p,q\rangle$ – funkcja Husimi.

Entropia Wehrla

$$S^{cl}(\rho) = -(2\pi\hbar)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}\langle p,q|\rho|p,q\rangle \ln\langle p,q|\rho|p,q\rangle \mathrm{d}p\mathrm{d}q$$

- $0 \leq \rho^{cl}(p,q) \leq 1$, a zatem gęstość nie może być skumulowana na zbiorze miary mniejszej niż $2\pi\hbar$ – mamy zgodność z zasadą nieoznaczoności
- $S^{cl} > 0$

Hipoteza Wehrla (dowód: Lieb '78)

$S^{cl}(\rho) \geq 1$ oraz minimum jest osiągane jedynie dla stanów koherentnych $|p, q\rangle\langle p, q|$

Uogólnienie: entropia Wehrla względem spinowych stanów koherentnych:

$$S^{cl}(\rho) = -\frac{2J+1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{S}^2} {}_J\langle\omega|\rho|\omega\rangle_J \ln {}_J\langle\omega|\rho|\omega\rangle_J \mathrm{d}\omega$$

Hipoteza Lieba

$$S^{cl}(\rho) \geq S^{cl}(|\omega\rangle_{J\,J}\langle\omega|) = \frac{2J}{2J+1}$$

Częściowe wyniki:

- $J = \frac{1}{2}$ – oczywiste (Lieb)
- $J = 1$ – Schupp (1999), Scutaru (2002)
- $J = \frac{3}{2}$ – Schupp (1999)

Twierdzenie Lieba-Soloveja (2012)

Dla dowolnej wklęsłej funkcji $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ oraz macierzy gęstości ρ na $\mathcal{H}_J$ zachodzi:

$$\frac{2J+1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} f({}_J\langle\omega|\rho|\omega\rangle_J) \mathrm{d}\omega \geq \frac{2J+1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} f(|{}_J\langle\omega|\uparrow\rangle_J|^2) \mathrm{d}\omega.$$

Ze względu na $SU(2)$-niezmienniczość, $\uparrow$ może być zastąpiony dowolnym punktem ze sfery.

Ogólna idea dowodu:

Φ^k : $\{$macierze gęstości na $\mathcal{H}_J\} \longrightarrow \{$macierze gęstości na $\mathcal{H}_{J+k/2}\}$

– odwzorowanie całkowicie dodatnie zachowujące ślad (kanał kwantowy)

- stany koherentne minimalizują $\mathrm{Tr}_{J+k/2} f(\Phi^k(\rho))$
- przejście graniczne:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2J+1}{2J+k+1} \mathrm{Tr}_{J+k/2}\left[f\left(\frac{2J+k+1}{2J+1} \Phi^k(\rho) \right) \right] = \frac{2J+1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} f(\rho^{cl}(\omega)) \mathrm{d}\omega$$

Definicja Φ^k

Zacznijmy od następującego utożsamienia:

$$\mathcal{H}_J = \mathbb{C}^{2J+1} = \bigotimes_{sym}^{2J} \mathcal{H}_{1/2} = \bigotimes_{sym}^{2J} \mathbb{C}^2$$

Niech $a_\uparrow^*$ będzie operatorem kreacji spinu w górę, tzn. dla dowolnego $m \in \mathbb{N}^+$ i $\psi \in \bigotimes_{sym}^{m} \mathcal{H}_{1/2}$ zachodzi:

$$a_\uparrow^* \psi = \sqrt{m+1} P_{sym}(|\uparrow\rangle_{\frac{1}{2}} \otimes \psi) \in \bigotimes_{sym}^{m+1} \mathcal{H}_{1/2},$$

gdzie P_{sym} jest rzutowaniem ortogonalnym na $\bigotimes_{sym}^{m+1} \mathcal{H}_{1/2}$. Analogicznie definiujemy $a_\downarrow^*$.

$$\Phi^k(\rho) = \frac{(2J+1)!}{(2J+k+1)!} \sum_{i_1,\dots,i_k=\uparrow,\downarrow} a_{i_k}^* \dots a_{i_1}^* \rho a_{i_1} \dots a_{i_k}$$

Twierdzenie

Dla macierzy gęstości ρ na $\mathcal{H}_J$ oraz $k \in \mathbb{N}$ ciąg wartości własnych macierzy $\Phi^k(\rho)$ jest majoryzowany przez ciąg wartości własnych $\Phi^k(|\omega\rangle\langle\omega|)$, który, z $SU(2)$-niezmienniczości jest niezależny od wyboru $\omega \in \mathbb{S}^2$.

Wniosek

Dla $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ – wklęsłej i macierzy gęstości ρ na $\mathcal{H}_J$ zachodzi:

$$\mathrm{Tr}_{J+k/2}[f(\Phi^k(\rho))] \geq \mathrm{Tr}_{J+k/2}[f(\Phi^k(|\omega\rangle\langle\omega|))],$$

dla wszystkich $\omega \in \mathbb{S}^2$.

Mówimy, że ciąg $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_M$ majoryzuje ciąg $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_M$ ($(a_1, a_2, \ldots a_M) \succ (b_1, b_2, \ldots b_M)$), jeżeli:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \geq \sum_{j=1}^{m} b_j, \qquad \text{dla } m = 1, \ldots, M-1,$$

$$\sum_{j=1}^{M} a_j = \sum_{j=1}^{M} b_j.$$

Twierdzenie (Karamata)

$(a_1, a_2, \ldots a_M) \succ (b_1, b_2, \ldots b_M)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej wklęsłej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\sum_{j=1}^{M} f(a_j) \leq \sum_{j=1}^{M} f(b_j).$$

Dla A, B - macierzy hermitowskich zapis $A \succ B$ oznacza, że ciąg wartości własnych macierzy A majoryzuje ciąg wartości własnych B. Można pokazać, że jeżeli A, B i C są macierzami hermitowskimi spełniającymi $A \succ B$ i $A \succ C$, to dla dowolnego $0 \leq \lambda \leq 1$ zachodzi:

$$A \succ \lambda B + (1-\lambda)C.$$

Dowód twierdzenia o majoryzowaniu – szkic

- Wystarczy ograniczyć się do $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\psi \in \mathcal{H}_J$.
- $\mathrm{rk}(\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)) \leq k+1$.
- $\lambda_j^k(\psi)$, $j = 0, 1, \ldots, 2J+k$ – malejący ciąg wartości własnych operatora $\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)$, z krotnościami; ϕ_j^k, $j = 0, 1, \ldots, 2J+k$ – odpowiadające im wektory własne
- $\lambda_j^{C,k}$ – wartości własne $\Phi^k(|\omega\rangle\langle\omega|)$:

$$\lambda_j^{C,k} := \frac{2J+1}{2J+k+1} \frac{(k+1)!(2J+k+1-j)!}{(2J+k+1)!(k+1-j)!}$$

- Dla $m \geq k$ zachodzi $\sum_{j=0}^m \lambda_j^k(\psi) = \mathrm{Tr}\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|) = 1$. Chcemy pokazać, że:

$$\sum_{j=0}^m \lambda_j^k(\psi) \leq \sum_{j=0}^m \lambda_j^{C,k}, \quad m = 0, \ldots, k-1.$$

- Indukcja ze względu na m. Dla $m = 0$ mamy oszacowanie:

$$\lambda_0^k(\psi) \leq \|\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)\| \leq \frac{2J+1}{2J+k+1} = \lambda_0^{C,k}.$$

Dowód twierdzenia o majoryzowaniu – szkic

- Wystarczy ograniczyć się do $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\psi \in \mathcal{H}_J$.
- $\mathrm{rk}(\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)) \leq k+1$.
- $\lambda_j^k(\psi)$, $j = 0, 1, \ldots, 2J+k$ – malejący ciąg wartości własnych operatora $\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)$, z krotnościami; ϕ_j^k, $j = 0, 1, \ldots, 2J+k$ – odpowiadające im wektory własne
- $\lambda_j^{C,k}$ – wartości własne $\Phi^k(|\omega\rangle\langle\omega|)$:

$$\lambda_j^{C,k} := \frac{2J+1}{2J+k+1} \frac{(k+1)!(2J+k+1-j)!}{(2J+k+1)!(k+1-j)!}$$

- Dla $m \geq k$ zachodzi $\sum_{j=0}^m \lambda_j^k(\psi) = \mathrm{Tr}\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|) = 1$. Chcemy pokazać, że:

$$\sum_{j=0}^m \lambda_j^k(\psi) \leq \sum_{j=0}^m \lambda_j^{C,k}, \quad m = 0, \ldots, k-1.$$

- Indukcja ze względu na m. Dla $m = 0$ mamy oszacowanie:

$$\lambda_0^k(\psi) \leq \|\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)\| \leq \frac{2J+1}{2J+k+1} = \lambda_0^{C,k}.$$

Dowód twierdzenia o majoryzowaniu – szkic

- Wystarczy ograniczyć się do $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\psi \in \mathcal{H}_J$.
- $\mathrm{rk}(\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)) \leq k+1$.
- $\lambda_j^k(\psi),\ j = 0, 1, \ldots, 2J+k$ – malejący ciąg wartości własnych operatora $\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)$, z krotnościami; $\phi_j^k,\ j = 0, 1, \ldots, 2J+k$ – odpowiadające im wektory własne
- $\lambda_j^{C,k}$ – wartości własne $\Phi^k(|\omega\rangle\langle\omega|)$:

$$\lambda_j^{C,k} := \frac{2J+1}{2J+k+1} \frac{(k+1)!(2J+k+1-j)!}{(2J+k+1)!(k+1-j)!}$$

- Dla $m \geq k$ zachodzi $\sum_{j=0}^{m} \lambda_j^k(\psi) = \mathrm{Tr}\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|) = 1$. Chcemy pokazać, że:

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j^k(\psi) \leq \sum_{j=0}^{m} \lambda_j^{C,k}, \quad m = 0, \ldots, k-1.$$

- Indukcja ze względu na m. Dla $m = 0$ mamy oszacowanie:

$$\lambda_0^k(\psi) \leq \|\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)\| \leq \frac{2J+1}{2J+k+1} = \lambda_0^{C,k}.$$

Dowód twierdzenia o majoryzowaniu – szkic

- Wystarczy ograniczyć się do $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\psi \in \mathcal{H}_J$.
- $\mathrm{rk}(\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)) \leq k+1$.
- $\lambda_j^k(\psi)$, $j = 0, 1, \ldots, 2J+k$ – malejący ciąg wartości własnych operatora $\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)$, z krotnościami; ϕ_j^k, $j = 0, 1, \ldots, 2J+k$ – odpowiadające im wektory własne
- $\lambda_j^{C,k}$ – wartości własne $\Phi^k(|\omega\rangle\langle\omega|)$:

$$\lambda_j^{C,k} := \frac{2J+1}{2J+k+1} \frac{(k+1)!(2J+k+1-j)!}{(2J+k+1)!(k+1-j)!}$$

- Dla $m \geq k$ zachodzi $\sum_{j=0}^m \lambda_j^k(\psi) = \mathrm{Tr}\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|) = 1$. Chcemy pokazać, że:

$$\sum_{j=0}^m \lambda_j^k(\psi) \leq \sum_{j=0}^m \lambda_j^{C,k}, \quad m = 0, \ldots, k-1.$$

- Indukcja ze względu na m. Dla $m = 0$ mamy oszacowanie:

$$\lambda_0^k(\psi) \leq \|\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)\| \leq \frac{2J+1}{2J+k+1} = \lambda_0^{C,k}.$$

Dowód twierdzenia o majoryzowaniu – szkic

- Wystarczy ograniczyć się do $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\psi \in \mathcal{H}_J$.
- $\mathrm{rk}(\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)) \leq k+1$.
- $\lambda_j^k(\psi),\ j = 0, 1, \ldots, 2J+k$ – malejący ciąg wartości własnych operatora $\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)$, z krotnościami; $\phi_j^k,\ j = 0, 1, \ldots, 2J+k$ – odpowiadające im wektory własne
- $\lambda_j^{C,k}$ – wartości własne $\Phi^k(|\omega\rangle\langle\omega|)$:

$$\lambda_j^{C,k} := \frac{2J+1}{2J+k+1} \frac{(k+1)!(2J+k+1-j)!}{(2J+k+1)!(k+1-j)!}$$

- Dla $m \geq k$ zachodzi $\sum_{j=0}^{m} \lambda_j^k(\psi) = \mathrm{Tr}\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|) = 1$. Chcemy pokazać, że:

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j^k(\psi) \leq \sum_{j=0}^{m} \lambda_j^{C,k}, \quad m = 0, \ldots, k-1.$$

- Indukcja ze względu na m. Dla $m = 0$ mamy oszacowanie:

$$\lambda_0^k(\psi) \leq \|\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)\| \leq \frac{2J+1}{2J+k+1} = \lambda_0^{C,k}.$$

Dowód twierdzenia o majoryzowaniu – szkic

- Wystarczy ograniczyć się do $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\psi \in \mathcal{H}_J$.
- $\mathrm{rk}(\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)) \leq k+1$.
- $\lambda_j^k(\psi)$, $j = 0, 1, \ldots, 2J+k$ – malejący ciąg wartości własnych operatora $\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)$, z krotnościami; ϕ_j^k, $j = 0, 1, \ldots, 2J+k$ – odpowiadające im wektory własne
- $\lambda_j^{C,k}$ – wartości własne $\Phi^k(|\omega\rangle\langle\omega|)$:

$$\lambda_j^{C,k} := \frac{2J+1}{2J+k+1} \frac{(k+1)!(2J+k+1-j)!}{(2J+k+1)!(k+1-j)!}$$

- Dla $m \geq k$ zachodzi $\sum_{j=0}^m \lambda_j^k(\psi) = \mathrm{Tr}\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|) = 1$. Chcemy pokazać, że:

$$\sum_{j=0}^m \lambda_j^k(\psi) \leq \sum_{j=0}^m \lambda_j^{C,k}, \quad m = 0, \ldots, k-1.$$

- Indukcja ze względu na m. Dla $m = 0$ mamy oszacowanie:

$$\lambda_0^k(\psi) \leq \|\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)\| \leq \frac{2J+1}{2J+k+1} = \lambda_0^{C,k}.$$

Dowód twierdzenia o majoryzowaniu – szkic

- Wystarczy ograniczyć się do $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\psi \in \mathcal{H}_J$.
- $\mathrm{rk}(\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)) \leq k+1$.
- $\lambda_j^k(\psi),\ j = 0, 1, \ldots, 2J+k$ – malejący ciąg wartości własnych operatora $\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)$, z krotnościami; $\phi_j^k,\ j = 0, 1, \ldots, 2J+k$ – odpowiadające im wektory własne
- $\lambda_j^{C,k}$ – wartości własne $\Phi^k(|\omega\rangle\langle\omega|)$:

$$\lambda_j^{C,k} := \frac{2J+1}{2J+k+1} \frac{(k+1)!(2J+k+1-j)!}{(2J+k+1)!(k+1-j)!}$$

- Dla $m \geq k$ zachodzi $\sum_{j=0}^{m} \lambda_j^k(\psi) = \mathrm{Tr}\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|) = 1$. Chcemy pokazać, że:

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j^k(\psi) \leq \sum_{j=0}^{m} \lambda_j^{C,k}, \quad m = 0, \ldots, k-1.$$

- Indukcja ze względu na m. Dla $m = 0$ mamy oszacowanie:

$$\lambda_0^k(\psi) \leq \|\Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)\| \leq \frac{2J+1}{2J+k+1} = \lambda_0^{C,k}.$$

- Załóżmy, że teza zachodzi aż do $m-1$ dla pewnego $m \geq 1$. Dowód dla m przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na k. Dla $k \leq m$ mamy równość (obie strony są równe 1).
- Załóżmy, że teza zachodzi aż do pewnego $k \geq m$. Dowodzimy dla $k+1$.
- Definiujemy operator Γ na $\mathcal{H}_{J+k/2}$:

$$\Gamma = \sum_{j=0}^{m} (a_\uparrow |\phi_j^{k+1}\rangle\langle\phi_j^{k+1}| a_\uparrow^* + a_\downarrow |\phi_j^{k+1}\rangle\langle\phi_j^{k+1}| a_\downarrow^*)$$

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j^{k+1}(\psi) = \frac{(2J+1)!}{(2J+k+2)!} \sum_{j=0}^{m} \sum_{i_1,\ldots,i_{k+1}=\uparrow,\downarrow} \langle\phi_j^{k+1}| a_{i_{k+1}}^* \ldots a_{i_1}^* |\psi\rangle\langle\psi| a_{i_1} \ldots a_{i_{k+1}} |\phi_j^{k+1}\rangle$$

$$= \frac{(2J+1)!}{(2J+k+2)!} \sum_{i_1,\ldots,i_k=\uparrow,\downarrow} \mathrm{Tr}[\Gamma a_{i_k}^* \ldots a_{i_1}^* |\psi\rangle\langle\psi| a_{i_1} \ldots a_{i_k}]$$

$$= \frac{1}{2J+k+2} \mathrm{Tr}[\Gamma \Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)] = \frac{1}{2J+k+2} \sum_{j=0}^{2J+k} \lambda_j^k(\psi) \langle\phi_j^k|\Gamma|\phi_j^k\rangle$$

- Załóżmy, że teza zachodzi aż do $m-1$ dla pewnego $m \geq 1$. Dowód dla m przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na k. Dla $k \leq m$ mamy równość (obie strony są równe 1).
- Załóżmy, że teza zachodzi aż do pewnego $k \geq m$. Dowodzimy dla $k+1$.
- Definiujemy operator Γ na $\mathcal{H}_{J+k/2}$:

$$\Gamma = \sum_{j=0}^{m} (a_\uparrow |\phi_j^{k+1}\rangle\langle\phi_j^{k+1}| a_\uparrow^* + a_\downarrow |\phi_j^{k+1}\rangle\langle\phi_j^{k+1}| a_\downarrow^*)$$

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j^{k+1}(\psi) = \frac{(2J+1)!}{(2J+k+2)!} \sum_{j=0}^{m} \sum_{i_1,\ldots,i_{k+1}=\uparrow,\downarrow} \langle\phi_j^{k+1}| a_{i_{k+1}}^* \ldots a_{i_1}^* |\psi\rangle\langle\psi| a_{i_1} \ldots a_{i_{k+1}} |\phi_j^{k+1}\rangle$$

$$= \frac{(2J+1)!}{(2J+k+2)!} \sum_{i_1,\ldots,i_k=\uparrow,\downarrow} \mathrm{Tr}[\Gamma a_{i_k}^* \ldots a_{i_1}^* |\psi\rangle\langle\psi| a_{i_1} \ldots a_{i_k}]$$

$$= \frac{1}{2J+k+2} \mathrm{Tr}[\Gamma \Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)] = \frac{1}{2J+k+2} \sum_{j=0}^{2J+k} \lambda_j^k(\psi) \langle\phi_j^k|\Gamma|\phi_j^k\rangle$$

- Załóżmy, że teza zachodzi aż do $m-1$ dla pewnego $m \geq 1$. Dowód dla m przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na k. Dla $k \leq m$ mamy równość (obie strony są równe 1).
- Załóżmy, że teza zachodzi aż do pewnego $k \geq m$. Dowodzimy dla $k+1$.
- Definiujemy operator Γ na $\mathcal{H}_{J+k/2}$:

$$\Gamma = \sum_{j=0}^{m} (a_\uparrow |\phi_j^{k+1}\rangle\langle\phi_j^{k+1}| a_\uparrow^* + a_\downarrow |\phi_j^{k+1}\rangle\langle\phi_j^{k+1}| a_\downarrow^*)$$

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j^{k+1}(\psi) = \frac{(2J+1)!}{(2J+k+2)!} \sum_{j=0}^{m} \sum_{i_1,\ldots,i_{k+1}=\uparrow,\downarrow} \langle\phi_j^{k+1}| a_{i_{k+1}}^* \ldots a_{i_1}^* |\psi\rangle\langle\psi| a_{i_1} \ldots a_{i_{k+1}} |\phi_j^{k+1}\rangle$$

$$= \frac{(2J+1)!}{(2J+k+2)!} \sum_{i_1,\ldots,i_k=\uparrow,\downarrow} \mathrm{Tr}[\Gamma a_{i_k}^* \ldots a_{i_1}^* |\psi\rangle\langle\psi| a_{i_1} \ldots a_{i_k}]$$

$$= \frac{1}{2J+k+2} \mathrm{Tr}[\Gamma \Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)] = \frac{1}{2J+k+2} \sum_{j=0}^{2J+k} \lambda_j^k(\psi) \langle\phi_j^k|\Gamma|\phi_j^k\rangle$$

- Załóżmy, że teza zachodzi aż do $m-1$ dla pewnego $m \geq 1$. Dowód dla m przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na k. Dla $k \leq m$ mamy równość (obie strony są równe 1).
- Załóżmy, że teza zachodzi aż do pewnego $k \geq m$. Dowodzimy dla $k+1$.
- Definiujemy operator Γ na $\mathcal{H}_{J+k/2}$:

$$\Gamma = \sum_{j=0}^{m} (a_\uparrow |\phi_j^{k+1}\rangle\langle\phi_j^{k+1}| a_\uparrow^* + a_\downarrow |\phi_j^{k+1}\rangle\langle\phi_j^{k+1}| a_\downarrow^*)$$

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j^{k+1}(\psi) = \frac{(2J+1)!}{(2J+k+2)!} \sum_{j=0}^{m} \sum_{i_1,\ldots,i_{k+1}=\uparrow,\downarrow} \langle\phi_j^{k+1}| a_{i_{k+1}}^* \ldots a_{i_1}^* |\psi\rangle\langle\psi| a_{i_1} \ldots a_{i_{k+1}} |\phi_j^{k+1}\rangle$$

$$= \frac{(2J+1)!}{(2J+k+2)!} \sum_{i_1,\ldots,i_k=\uparrow,\downarrow} \mathrm{Tr}[\Gamma a_{i_k}^* \ldots a_{i_1}^* |\psi\rangle\langle\psi| a_{i_1} \ldots a_{i_k}]$$

$$= \frac{1}{2J+k+2} \mathrm{Tr}[\Gamma \Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)] = \frac{1}{2J+k+2} \sum_{j=0}^{2J+k} \lambda_j^k(\psi) \langle\phi_j^k|\Gamma|\phi_j^k\rangle$$

- Załóżmy, że teza zachodzi aż do $m-1$ dla pewnego $m \geq 1$. Dowód dla m przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na k. Dla $k \leq m$ mamy równość (obie strony są równe 1).
- Załóżmy, że teza zachodzi aż do pewnego $k \geq m$. Dowodzimy dla $k+1$.
- Definiujemy operator Γ na $\mathcal{H}_{J+k/2}$:

$$\Gamma = \sum_{j=0}^{m} (a_\uparrow |\phi_j^{k+1}\rangle\langle\phi_j^{k+1}| a_\uparrow^* + a_\downarrow |\phi_j^{k+1}\rangle\langle\phi_j^{k+1}| a_\downarrow^*)$$

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j^{k+1}(\psi) = \frac{(2J+1)!}{(2J+k+2)!} \sum_{j=0}^{m} \sum_{i_1,\ldots,i_{k+1}=\uparrow,\downarrow} \langle\phi_j^{k+1}| a_{i_{k+1}}^* \ldots a_{i_1}^* |\psi\rangle\langle\psi| a_{i_1} \ldots a_{i_{k+1}} |\phi_j^{k+1}\rangle$$

$$= \frac{(2J+1)!}{(2J+k+2)!} \sum_{i_1,\ldots,i_k=\uparrow,\downarrow} \mathrm{Tr}[\Gamma a_{i_k}^* \ldots a_{i_1}^* |\psi\rangle\langle\psi| a_{i_1} \ldots a_{i_k}]$$

$$= \frac{1}{2J+k+2} \mathrm{Tr}[\Gamma \Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)] = \frac{1}{2J+k+2} \sum_{j=0}^{2J+k} \lambda_j^k(\psi) \langle\phi_j^k|\Gamma|\phi_j^k\rangle$$

- Załóżmy, że teza zachodzi aż do $m-1$ dla pewnego $m \geq 1$. Dowód dla m przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na k. Dla $k \leq m$ mamy równość (obie strony są równe 1).
- Załóżmy, że teza zachodzi aż do pewnego $k \geq m$. Dowodzimy dla $k+1$.
- Definiujemy operator Γ na $\mathcal{H}_{J+k/2}$:

$$\Gamma = \sum_{j=0}^{m} (a_\uparrow |\phi_j^{k+1}\rangle\langle\phi_j^{k+1}| a_\uparrow^* + a_\downarrow |\phi_j^{k+1}\rangle\langle\phi_j^{k+1}| a_\downarrow^*)$$

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j^{k+1}(\psi) = \frac{(2J+1)!}{(2J+k+2)!} \sum_{j=0}^{m} \sum_{i_1,\ldots,i_{k+1}=\uparrow,\downarrow} \langle\phi_j^{k+1}| a_{i_{k+1}}^* \ldots a_{i_1}^* |\psi\rangle\langle\psi| a_{i_1} \ldots a_{i_{k+1}} |\phi_j^{k+1}\rangle$$

$$= \frac{(2J+1)!}{(2J+k+2)!} \sum_{i_1,\ldots,i_k=\uparrow,\downarrow} \mathrm{Tr}[\Gamma a_{i_k}^* \ldots a_{i_1}^* |\psi\rangle\langle\psi| a_{i_1} \ldots a_{i_k}]$$

$$= \frac{1}{2J+k+2} \mathrm{Tr}[\Gamma \Phi^k(|\psi\rangle\langle\psi|)] = \frac{1}{2J+k+2} \sum_{j=0}^{2J+k} \lambda_j^k(\psi) \langle\phi_j^k|\Gamma|\phi_j^k\rangle$$

- $\mathrm{Tr}\Gamma = (m+1)(2J+k+1)$
- $0 \leq \Gamma \leq (2J+k+2)\mathbb{I}$
- A zatem:

$$\Gamma \leq \sum_{j=0}^{m-1}(2J+k+2)|\phi_j^k\rangle\langle\phi_j^k| + (2J+k+1-m)|\phi_m^k\rangle\langle\phi_m^k|$$

  i otrzymujemy oszacowanie:

$$\sum \lambda_j^{k+1}(\psi) \leq \frac{2J+k+1-m}{2J+k+2}\sum_{j=0}^{m}\lambda_j^k(\psi) + \frac{m+1}{2J+k+2}\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_j^k(\psi).$$

Teza wynika z założenia indukcyjnego oraz z faktu, że w przypadku stanów koherentnych Γ jest równa podanemu ograniczeniu.

- $\mathrm{Tr}\Gamma = (m+1)(2J+k+1)$
- $0 \leq \Gamma \leq (2J+k+2)\mathbb{I}$
- A zatem:

$$\Gamma \leq \sum_{j=0}^{m-1}(2J+k+2)|\phi_j^k\rangle\langle\phi_j^k| + (2J+k+1-m)|\phi_m^k\rangle\langle\phi_m^k|$$

i otrzymujemy oszacowanie:

$$\sum \lambda_j^{k+1}(\psi) \leq \frac{2J+k+1-m}{2J+k+2}\sum_{j=0}^{m}\lambda_j^k(\psi) + \frac{m+1}{2J+k+2}\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_j^k(\psi).$$

Teza wynika z założenia indukcyjnego oraz z faktu, że w przypadku stanów koherentnych Γ jest równa podanemu ograniczeniu.

- $\mathrm{Tr}\Gamma = (m+1)(2J+k+1)$
- $0 \leq \Gamma \leq (2J+k+2)\mathbb{I}$
- A zatem:

$$\Gamma \leq \sum_{j=0}^{m-1}(2J+k+2)|\phi_j^k\rangle\langle\phi_j^k| + (2J+k+1-m)|\phi_m^k\rangle\langle\phi_m^k|$$

i otrzymujemy oszacowanie:

$$\sum \lambda_j^{k+1}(\psi) \leq \frac{2J+k+1-m}{2J+k+2}\sum_{j=0}^{m}\lambda_j^k(\psi) + \frac{m+1}{2J+k+2}\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_j^k(\psi).$$

Teza wynika z założenia indukcyjnego oraz z faktu, że w przypadku stanów koherentnych Γ jest równa podanemu ograniczeniu.

- $\mathrm{Tr}\Gamma = (m+1)(2J+k+1)$
- $0 \leq \Gamma \leq (2J+k+2)\mathbb{I}$
- A zatem:

$$\Gamma \leq \sum_{j=0}^{m-1}(2J+k+2)|\phi_j^k\rangle\langle\phi_j^k| + (2J+k+1-m)|\phi_m^k\rangle\langle\phi_m^k|$$

i otrzymujemy oszacowanie:

$$\sum \lambda_j^{k+1}(\psi) \leq \frac{2J+k+1-m}{2J+k+2}\sum_{j=0}^{m}\lambda_j^k(\psi) + \frac{m+1}{2J+k+2}\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_j^k(\psi).$$

Teza wynika z założenia indukcyjnego oraz z faktu, że w przypadku stanów koherentnych Γ jest równa podanemu ograniczeniu.

Lemat 1.

Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ – ciągła. Wtedy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2J+1}{2J+k+1} \mathrm{Tr}\left[f\left(\frac{2J+k+1}{2J+1} \Phi^k(|\uparrow\rangle\langle\uparrow|) \right) \right] = \frac{2J+1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} f(|\langle\omega|\uparrow\rangle|^2) \mathrm{d}\omega$$

Lemat 2.

Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ – wklęsła. Wtedy dla dowolnej macierzy gęstości ρ na $\mathcal{H}_J$ i dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\frac{2J+1}{2J+k+1} \mathrm{Tr}_{J+k/2}\left[f\left(\frac{2J+k+1}{2J+1} \Phi^k(\rho) \right) \right] \leq \frac{2J+1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} f({}_J\langle\omega|\rho|\omega\rangle_J) \mathrm{d}\omega$$

W połączeniu z wnioskiem z twierdzenia o majoryzacji otrzymujemy dowód głównego twierdzenia.

- E.H. Lieb, *Proof of an entropy conjecture of Wehrl*, Comm. Math. Phys., **62**, no.1, 35-41 (1978)
- A. Wehrl, *On the relation between classical and quantum-mechanical entropy*, Rep. Math. Phys., **16**, no. 3, 353-358 (1979)
- P. Schupp *On Lieb's conjecture for the Wehrl entropy of Bloch coherent states*, Comm. Math. Phys., **207**, 481-493 (1999)
- E.H. Lieb, J.P. Solovej, *Proof of an entropy conjecture for Bloch coherent spin states and its generalizations*, arXiv:1208.3632v2 (2012)